

Math. P. 501

SYSTEM
DER
RAUMLEHRE.

NACH DEN PRINZIPIEN
DER
GRASSMANN'SCHEN AUSDEHNUNGSLEHRE

UND ALS EINLEITUNG IN DIESELBE

DARGESTELLT

VON

VICTOR SCHLEGEL,
MATHEMATIKER AM GYMNASIUM ZU WAREN.

ERSTER THEIL: GEOMETRIE.

DIE GEBIETE DES PUNKTES, DER GERADEN, DER EBENE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1872.



Math. P. 501 =

SYSTEM
DER
RAUMLEHRE.

NACH DEN PRINZIPIEN
DER
GRASSMANN'SCHEN AUSDEHNUNGSLEHRE

UND ALS EINLEITUNG IN DIESELBE

DARGESTELLT

VON

VICTOR SCHLEGEL,
MATHEMATIKER AM GYMNASIUM ZU WAREN.

ERSTER THEIL: GEOMETRIE.

DIE GEBIETE DES PUNKTES, DER GERADEN, DER EBENE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1872.

SYSTEM
VON
RAUMLEHRE
NACH DEN PRINZIPIEN
DER
GRASMANNSCHEN ANSCHAUUNGSLEHRE
UND DER ERLEUTERUNG IN DERSELBEN



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON H. A. SCHULZE
1872

DEM
SCHÖPFER DER AUSDEHNUNGSLEHRE,

HERRN
HERMANN GRASSMANN

PROFESSOR AM MARIENSTIFTS-GYMNASIUM IN STETTIN

ZUGEEIGNET
VOM VERFASSER.

DEM

SCHÖPKE DER AUFNOMME

HERN

HERMAN OLSMAN

LEHRER AN DER HANDELS-ACADEMIE

STRECKE

VON LEBEN

Vorrede.

Vor nunmehr 28 Jahren erschien unter dem Titel: „*Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*“, von Hermann Grassmann ein Werk, welches den Gedanken einer geometrischen Analyse zur Ausführung brachte. Durch Aufstellung und Begründung einer Reihe von neuen Rechnungs-Operationen schuf der Verfasser eine Analysis, deren Formeln nicht nur eine unmittelbare Uebertragung auf räumliche Gebiete gestatteten, sondern ganz allgemein für eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen gelten. Er zeigte, dass auch die gewöhnliche Arithmetik nur als specieller Fall in seiner Analysis enthalten sei, und vereinigte auf diese Weise unter einem höheren Gesichtspunkte die beiden, scheinbar so heterogenen Wissenschaften der Zahlenlehre und Raumlehre, die bisher nur widerstrebend und unvollkommen durch das Band der analytischen Geometrie zusammengehalten wurden. Zahlreiche Anwendungen auf Geometrie und Stereometrie, auf Statik und Mechanik, selbst auf Magnetismus und Krystallographie bewiesen auf das Schlagendste, dass die neue Analysis die einzige, der Natur dieser Wissenschaften angemessene sei, während das bisherige Verfahren oft die weitesten Umwege durch mühsame Formeln erforderte, um zu einfachen Zielen zu gelangen. Nur in einem Punkte (der Addition der Strecken) berührte sich Grassmann's Arbeit mit einer früheren (Möbius' barycentrischem Calcul); im Uebrigen war der ganze grosse Ideenreichtum des Werkes neu. — Den Gedanken einer geometrischen Analyse überhaupt hatte allerdings schon Leibniz ausgesprochen, und zur Durchführung desselben in seiner „geometrischen Charakteristik“ einen Versuch gemacht. Es ist das Verdienst der Fürstlich Jablonski'schen Gesellschaft, diesen Leibniz'schen Gedanken der

Vergessenheit entrissen zu haben; und nichts konnte günstiger zusammentreffen, als das Erscheinen der Ausdehnungslehre und der von jener Gesellschaft gestellten Preisaufgabe: „den von Leibniz erfundenen geometrischen Calcul wieder herzustellen und weiter auszubilden, oder einen ihm ähnlichen aufzustellen.“ Mit einer kurzen Darstellung der theilweise schon weiter ausgeführten Hauptgedanken der Ausdehnungslehre, eingeleitet durch einen kritischen Rückblick auf Leibniz' Bestrebungen, erwarb Grassmann den Preis. Drei Jahre später als die Ausdehnungslehre (1847) erschien die Preisschrift, gefolgt von einer commentirenden Abhandlung von Möbius. In den folgenden zehn Jahren brachte Crelle's Journal eine Reihe von Aufsätzen, in welchen Grassmann Anwendungen seiner Analysis auf die höhere Geometrie gab. Aus allen diesen Arbeiten ist am bekanntesten die nach dem Entdecker genannte Erzeugungsart der Oberflächen 3^{ter} Ordnung. Dahingegen vermochte gerade die wichtigste Arbeit, die Ausdehnungslehre, nicht, in grössere Kreise zu dringen oder zu weiterer Bearbeitung Anregung zu geben. — Die Gründe hierfür sind theils in den Zeitverhältnissen, theils in der Sache selbst zu suchen. — Ein Zeitalter, welches die imaginären Grössen noch als unmögliche ansah, und die „nicht-euklidische“ Geometrie mit Kopfschütteln betrachtete, konnte natürlich auch an den n Dimensionen der Ausdehnungslehre nur wenig Geschmack finden, und noch weniger vielleicht an den ungewohnten Operationen mit ebenso ungewohnten Objecten. Dazu kam wohl auch der Umstand, dass die mathematischen Kräfte der letzten Jahrzehnte vollauf beschäftigt waren mit der Ausbildung der Theorien eines Jacobi, Dirichlet, Steiner, Möbius, Plücker, Hesse und Anderer, die alle einen Kreis eifriger Schüler um sich sammelten, während dem Verfasser der Ausdehnungslehre das Geschick eine gleiche Wirksamkeit versagt hatte. — Endlich aber darf nicht unberücksichtigt bleiben, dass das Werk in seiner mehr philosophischen als mathematischen Form, ungewöhnlichen Inhalt in ungewöhnlicher Form bietend, dem Studium grosse Schwierigkeiten entgensetzte, deren Bewältigung nicht einmal ein sehr lockendes Ziel verhiess. Denn die Ideenkreise des Buches lagen von denen der übrigen

gleichzeitigen Bestrebungen in der Mathematik weit entfernt, und die räumlichen Anwendungen kamen meist nur der Elementar-Geometrie zu Gute, welche damals noch unerschüttert auf der Euklid'schen Basis thronte. — Aus der Wahrnehmung dieser Schwierigkeiten ging nun eine neue Bearbeitung der Ausdehnungslehre hervor, die gleichzeitig einen zweiten (schon in der ersten Ausgabe in Aussicht genommenen) Theil umfasste, und im Jahre 1862 erschien. Hier sehen wir den ganzen Stoff in die mehr gegliederte Form von Lehrsätzen und Beweisen gebracht. Aber wenn auch dadurch eine dem Mathematiker geläufigere Form der Darstellung erreicht war, so hatte doch die Sache selbst wenig gewonnen, da die neue Form den Ueberblick über das ganze System wesentlich erschwerte, und die Beweise in ihrer nothwendigen Länge ungemein ermüdend waren. So hat denn bisher auch diese zweite Bearbeitung die Zahl der Freunde dieser neuen Wissenschaft, soweit mir bekannt geworden, nicht erheblich vermehrt. — Gleichwohl deuten alle Anzeichen darauf hin, dass die Zeit, wo dieselbe in die Entwicklung der Mathematik eingreifen wird, nicht mehr fern ist. — Die neueren Methoden der analytischen Geometrie nähern sich schon vielfach den Ideen der Ausdehnungslehre, und von den symbolischen Punktgleichungen Hesse's ist beispielsweise nur noch ein Schritt bis zu den Punktgrößen Grassmann's.*) Auch sonst sind in manchen Fällen von Anderen dieselben oder ähnliche Resultate gefunden worden, wie sie an weniger beachteten Stellen der Grassmann'schen Schriften niedergelegt sind. Vom Standpunkte der höheren Geometrie aus ist neuerdings ebenfalls das Gebiet der n Dimensionen betreten worden, und die elementare Geometrie, die den nächsten und grössten Nutzen aus den Anwendungen der Ausdehnungslehre zu ziehen berufen ist, sucht sich aus den Fesseln des Euklid'schen Sy-

*) Diese nahe Beziehung fiel mir besonders auf, als ich eine mit den Methoden der neueren Geometrie (1865) ausgeführte Arbeit über zwei reciproke Oberflächen nach den Principien der Ausdehnungslehre umarbeitete (Schulprogramm Waren 1871). — Vgl. auch z. B. Nr. 167—172 des vorliegenden Buches mit der Darstellung desselben Gegenstandes bei Hesse, Vorlesgn. aus d. anal. Geom. d. geraden Linie (Leipzig 1865) S. 51—59.

stems zu befreien, um mit der neueren Geometrie die noch immer entbehrte und doch. so sehr nöthige Fühlung zu gewinnen. Endlich hat es in jüngster Zeit auch nicht an beachtenswerthen Stimmen gefehlt, welche der neuen Wissenschaft ihre Anerkennung, ja selbst Bewunderung zollten. *)

Unter diesen Umständen habe ich es in vorliegender Arbeit unternommen, die Ausdehnungslehre auf die räumlichen Gebiete anzuwenden, oder mit anderen Worten: diese Wissenschaft, anstatt für ein Gebiet von n , für die Gebiete von 0, 1, 2, 3 Dimensionen zu behandeln. Der Vortheil, welcher aus dieser Behandlungsweise erwächst, ist ein doppelter. Erstens finden die im Fortschritt der Analysis gewonnenen Formeln ihre Anwendung auf die anschaulichen Gebilde des Raumes und gewinnen dadurch an Begreiflichkeit und an Reiz; auch kann für diese vier ersten Stufen der Ausdehnungslehre die ganze Terminologie der Raumlehre entlehnt werden. Sodann aber giebt jedes neue Gebiet, welches man betritt, zu einer Wiederholung und Erweiterung der im vorigen angestellten Betrachtungen Anlass, wodurch die Aneignung der neuen und ungewohnten Operationen ungemein erleichtert wird. — Um nun mit Hilfe der Ausdehnungslehre die Raumlehre zu begründen, ist es keineswegs nöthig, das ganze Material der neuen Analysis anzuwenden. Schon die Hauptbegriffe und die Grundformeln reichen hierzu aus, während der volle Reichthum an Beziehungen, den die Ausdehnungslehre enthält, erst in höheren Gebieten zur Entfaltung kommt. Daher dient diese Schrift auch eben nur zur *Einführung* in jene Wissenschaft, und soll das Studium derselben erleichtern. Dieselbe würde, falls der vorliegende erste Theil den Beifall des mathematischen Publikums finden

*) Man sehe namentlich: Hankel, Vorlesgn. üb. d. complexen Zahlen (Leipzig 1867) S. 16, 105, 140, und Clebsch, Zum Gedächtniss an J. Plücker (Göttingen 1872) S. 8, 28. — Ueber die Entstehung und Geschichte der Ausdehnungslehre (die ich an dieser Stelle nur im Allgemeinen, soviel zur Orientirung nöthig ist, verfolgen konnte) geben die beredteste Auskunft die Vorreden zu den beiden Ausgaben der „Ausdehnungslehre“. Ich bin überzeugt, dass, wer diese beiden Vorreden gelesen, dieselben nicht ohne lebhaftes Interesse für den Verfasser und sein Werk aus der Hand legen wird.

sollte, durch einen zweiten, welcher das Gebiet des Raumes behandelte, ihren Abschluss finden, und es würde damit auch für eine analoge Darstellung der allgemeinen Ausdehnungslehre der Weg einigermaßen geebnet sein.

Um in die ungemeine Mannigfaltigkeit der Beziehungen, wie sie schon im Gebiete der Ebene hervortritt, einige Ordnung zu bringen, war ich auf die Aufstellung eines *Systems* bedacht, welches, wenn sachgemäss, in jedem neuen Gebiete nur gehörig erweitert zu werden braucht. Ich hoffe, dass durch Anwendung dieser Behandlungsweise auch die allgemeine Ausdehnungslehre an Uebersichtlichkeit und Fasslichkeit gewinnen wird. Diese, von der Grassmann'schen wesentlich abweichende Darstellung nöthigte mich aber auch in einzelnen Fällen, wo ich keine Vorarbeit vorfand, zu selbständiger Ausfüllung der entstehenden Lücken. Da ich stets auf die Parallelstellen in den Grassmann'schen Werken verwiesen habe, so wird der aufmerksame Leser jene Fälle leicht herausfinden und beurtheilen können.*) — Noch erlaube

*) Zur Orientirung füge ich ein Verzeichniss derjenigen Schriften Grassmann's bei, welche für das vorliegende System von besonderer Bedeutung waren, und auf welche darin vielfach Bezug genommen wird.

1. Die *lineale Ausdehnungslehre*, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und der Krystallonomie erläutert. Leipzig 1844 bei Wigand.

2. *Geometrische Analyse*, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Gekrönte Preisschrift (von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft). Mit einer erläuternden Abhandlung von A. F. Möbius. Leipzig 1847 bei Weidmann.

3. Die *Ausdehnungslehre*. Vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin 1862 bei Enslin.

4. *Abhandlungen* in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik.

1) Theorie der Centralen. Bd. 24 u. 25. (1842). — 2) Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Curven, mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse. Bd. 31. (1846). — 3) Ueber die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien und über geometrische Definitionen diesen Curven. Bd. 36. (1848). — 4) Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischen Curven durch Bewegung gerader Linien. — 5) Die höhere Projectivität und Perspectivität in der Ebene, dargestellt durch geometrische Analyse. — 6) Die höhere Pro-

ich mir, an dieser Stelle auf den Umstand aufmerksam zu machen, dass eine beträchtliche Anzahl der aufgestellten Sätze unmittelbar auf das Gebiet der Mechanik übertragen werden kann.

Wenn ich im Vorstehenden die Beziehung meiner Arbeit zur *Ausdehnungslehre* erörterte, so habe ich andererseits noch den Standpunkt hervorzuheben, welchen sie gegenüber den bisherigen Bearbeitungen der *Elementar-Geometrie* vertritt.

Während die verschiedenen Zweige der *höheren Mathematik* in der neueren Zeit durch stetige Vervollkommnung, namentlich Vereinfachung der Methoden, einen hohen Grad der Ausbildung erlangt haben, entbehren die *Elemente* der Mathematik bis auf den heutigen Tag nicht nur jener ansprechenden Form, sondern überhaupt jeder wissenschaftlichen Begründung, jeder systematischen Behandlung, die auch nur entfernt mit den Darstellungen der höheren Mathematik sich messen könnte. Seit Ohm's „Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik“ ist überhaupt die Anzahl ähnlicher Versuche verschwindend klein gewesen, gegenüber der Unzahl von „Lehrbüchern“ oder „Leitfaden“ der elementaren Mathematik, welche alle den Versuch machten, das herkömmliche festgeordnete mathematische Pensum der höheren Lehranstalten in Formen zu bringen, die den wissenschaftlichen oder pädagogischen Bedürfnissen ihrer Verfasser genügen sollten. Aber eben das durch alte Gewohnheit stipulirte Schulpensum hinderte jede freie Regung auf diesem Gebiete, welchem überdies fast nur solche Kräfte sich wid-

jectivität in der Ebene, dargestellt durch Funktionsverknüpfungen. Bd. 42. (1851). — 7) Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien. Bd. 44. (1852). — 8) Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen. — 9) Grundsätze der stereometrischen Multiplication. — 10) Ueber die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen. — 11) Die stereometrische Gleichung zweiten Grades und die dadurch dargestellten Oberflächen. — 12) Die stereometrische Gleichung dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen. — 13) Sur les différents genres de multiplication. Bd. 49. (1854). — 14) Die lineale Erzeugung von Curven dritter Ordnung. Bd. 52. (1856).

meten, die von vornherein dem Bedürfniss der Schule jede andere Rücksicht unterordneten.

So erblicken wir denn noch heute in der betreffenden Literatur die „Arithmetik und Algebra“ meist in Form eines Conglomerates lose zusammenhängender Rechenregeln mit allerlei aus alter Zeit stehen gebliebenen praktischen „Anhängen“, so die „Geometrie und Stereometrie“ als eine Sammlung willkürlicher Grundsätze, mehr oder minder dunkler Erklärungen und geometrischer Kunststücke.

Dieser ungenügende Zustand der Elemente offenbart sich aber am deutlichsten in seinen Wirkungen auf das Studium der Wissenschaft. Ihm vorzüglich, nicht ihrem abstracten Inhalte, verdankt es die Mathematik überhaupt, dass sie selbst dem gebildeten Publikum gegenüber die Rolle einer modernen „schwarzen Kunst“ spielt, nur zugänglich den besonders dafür prädestinirten Naturen. Ihrem gegenwärtigen Zustande verdanken es die Elemente insbesondere, dass sie auf der Schule die Plage so vieler sonst gut veranlagten Köpfe sind, dass sie nur einer verschwindenden Minderzahl ein Interesse abzugewinnen, und auch von dieser nur einen Bruchtheil zur Fortsetzung dieses Studiums zu begeistern vermögen.

Aber je grösser die Fülle von Ergebnissen wird, mit welcher uns heut zu Tage die gesammten Naturwissenschaften überschütten, und je mehr man zur Erkenntniss gelangt, eine wie oberflächliche und darum ungenügende Belehrung die sogenannten „populären“ naturwissenschaftlichen Schriften und Vorträge dem gebildeten Publikum gewähren, desto mehr wird auch der Werth einer wahren mathematischen Bildung steigen, desto mehr das Bedürfniss sich herausstellen, jedem Schüler, der die oberen Klassen verlässt, wenigstens die Grundlagen dieser Bildung mitzugeben, während die dem Schüler gegenwärtig gebotenen Kenntnisse und Fertigkeiten für seine wissenschaftliche Bildung von sehr geringem Werthe sind, weil dieselben ihm keinen Begriff von einer wissenschaftlichen Methode geben, mit welcher er weiter arbeiten könnte.

Wie sehr nun das Bedürfniss einer Neugestaltung, namentlich auf dem Gebiete der Raumlehre, sich schon gegenwärtig geltend macht, zeigt u. A. eine sehr lesenswerthe

redactionelle Aeusserung der „Ztschr. f. math. u. naturw. Unterricht“, Jahrg. 1. (1870), S. 490, in welcher es schliesslich heisst, es sei gerade ein Hauptzweck dieser Zeitschrift, eine rationellere Lehrmethode der Geometrie mit begründen zu helfen. — Diesen Bestrebungen sich anschliessend, möge das vorliegende System der Raumlehre als ein Versuch betrachtet werden, das übliche Material der Geometrie auf einer durchaus neuen Basis zu verarbeiten, und zwar mittelst der heuristischen Methode, deren Werth für die bildende Kraft des Unterrichts allgemein anerkannt ist, der aber das bisher übliche System der Geometrie sich durchaus nicht fügen will, weil es die Mehrzahl seiner Resultate auf dem Umwege gewinnt, welcher durch die Congruenz der Dreiecke führt. *)

Da nun der Inhalt des Systems keineswegs überall mit demjenigen Stoffe zusammenfiel, welcher in den bisherigen Lehrbüchern behandelt zu werden pflegt, so wurden am Ende mehrerer Entwicklungsstufen unter der Rubrik „Erweiterungen“ Abschnitte hinzugefügt, in welchen die zuletzt entwickelten Sätze zur Ableitung andrer bekannter Sätze benutzt wurden. — Auf diese Weise wurde fast das ganze Material der üblichen Lehrsätze an den geeigneten Stellen dem System eingefügt. Ausgeschlossen blieb nach dem Plane des Ganzen das Gebiet der Aufgaben. Nur beispielshalber wurden manche fernliegende Sätze als Aufgaben der zugehörigen Entwicklung vorangestellt, und an dem Beispiele der einfachsten Constructionsaufgaben wurde gezeigt, wie aus dem Material der Sätze solche Aufgaben sich bilden lassen. — Diejenigen Gegenstände der neueren Geometrie, welche in den Lehrbüchern meistens nicht enthalten sind, namentlich die Grundzüge der älteren und neueren analytischen, und der neueren synthetischen Geometrie traten natürlich von selbst durch die Entwicklung des Systems an ihrem Platze hervor; hier wurde jedoch das Gebiet der Erweiterungen mit den Linien zweiten Grades geschlossen, um dem Ganzen den Charakter des Elementaren zu erhalten. — Für die Anwendung der

*) Man vergleiche die Kritiken dieses Systems bei Hankel, *Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten* (Tübingen 1869), S. 9, und Grassmann, *Ausdehnungslehre* I. § 21 ff.

Ausdehnungslehre auf Probleme der höheren Geometrie ist durch diese Grundlagen der Weg geebnet. Wie sehr die Behandlung auch dieser Gegenstände an Einfachheit gewinnt, hat Grassmann selbst in seinen Abhandlungen an mehreren Beispielen gezeigt; und der systematische Ausbau der höheren Geometrie nach dieser neuen Methode wird einst eine lohnende Aufgabe sein.

Ich bin mir wohl bewusst, dass die von mir vertretenen und in dieser Arbeit niedergelegten Ideen denjenigen nicht gefallen werden, welche den gegenwärtigen Zustand der Elementar-Mathematik für befriedigend halten, sei es, dass sie selbst an der Verbesserung desselben auf der alten Basis mitgearbeitet, oder dass sie sich auch nur in die von Jugend auf genährten Anschauungen eingelebt haben. Aber ich darf auch bei allen meinen Lesern jenes Interesse an der Entwicklung der Wissenschaft voraussetzen, welches eine *vorurtheilsfreie* Prüfung neuer Anschauungen ermöglicht, und, *wenn* dieselben als ein Fortschritt gegen die alten sich herausstellen, in dem weiteren Ausbau derselben eine lohnende Arbeit findet.

Und so möge denn dieses Buch einerseits als Einleitung in die Ausdehnungslehre, andererseits als neues System der Geometrie der Aufmerksamkeit des mathematischen Publikums empfohlen sein.

Waren, im September 1872.

V. Schlegel.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	1
Erste Abtheilung: Gebiet des Punktes.	
I. Der Punkt als System	4
II. Grössen im Gebiet des Punktes.	
<i>Die Punktgrösse</i>	4
Zweite Abtheilung: Gebiet der Geraden.	
I. Die Gerade als System.	
1. <i>Bestimmung durch einen beweglichen Punkt</i>	6
2. <i>Bestimmung durch mehrere feste Punkte</i>	7
II. Grössen im Gebiet der Geraden.	
A. <i>Abgeleitet aus einem beweglichen Punkte. — Die Strecke.</i>	
a) Einmalige Bewegung des Punktes. — <i>Eine Strecke</i>	7
b) Mehrmalige Bewegung des Punktes. — <i>Mehrere Strecken</i>	8
c) Bewegung einer Strecke auf einer Geraden	9
B. <i>Abgeleitet aus zwei festen Punkten.</i>	
a) Grössen vom ersten Grade	12
b) Grössen vom zweiten Grade	15
Dritte Abtheilung: Gebiet der Ebene.	
I. Die Ebene als System.	
1. <i>Bestimmung durch eine bewegliche Gerade.</i>	
a) Lagenänderung der Geraden	18
b) Richtungsänderung der Geraden	19
2. <i>Bestimmung durch mehrere feste Geraden</i>	22
II. Grössen im Gebiet der Ebene.	
a) Einzelne Grössen.	
A. <i>Abgeleitet aus einer beweglichen Geraden.</i>	
a) Grössen, durch <i>Schiebung</i> einer Geraden erzeugt.	
1. Bewegung einer Geraden	23
2. Bewegung eines auf der Geraden liegenden <i>Punktes</i>	24

	Seite
3. Bewegung einer auf der Geraden liegenden <i>Strecke</i>	25
4. Bewegung eines auf der Geraden liegenden <i>Linientheils</i> . — Das <i>Parallelogramm</i> .	
a) Einmalige Bewegung des Linientheils: <i>Ein</i> Parallelogramm	27
b) Mehrmalige Bewegung des Linientheils: <i>Mehrere</i> Parallelo- gramme	28
c) Bewegung eines Parallelogramms auf einer Ebene	32
$\mathfrak{B}$. Grössen, durch <i>Drehung</i> einer Geraden erzeugt.	
a. Drehung um einen <i>auf</i> der Geraden liegenden Punkt.	
1. Bewegung einer <i>Geraden</i> . — Der <i>Winkel</i> .	
a) Einmalige Drehung der Geraden. — <i>Ein</i> Winkel	35
b) Mehrmalige Drehung der Geraden. — <i>Mehrere</i> Winkel	42
c) Bewegung eines Winkels auf einer Ebene.	45
2. Bewegung eines auf der Geraden liegenden <i>Punktes</i> . — Die <i>Kreislinie</i>	48
3. Bewegung einer auf der Geraden liegenden <i>Strecke</i>	49
4. Bewegung eines auf der Geraden liegenden Linientheils. — Die <i>Kreisfläche</i>	62
b. Drehung um einen <i>ausserhalb</i> der Geraden liegenden Punkt.	
1. Bewegung einer <i>Geraden</i>	63
2. Bewegung einer <i>Strecke</i>	65
B. <i>Abgeleitet aus mehreren festen Strecken oder Punkten</i> .	
1. Einfache Grössen.	
$\mathfrak{A}$. Abgeleitet aus mehreren festen <i>Punkten</i> .	
a) Grössen vom <i>ersten</i> Grade	70
b) Grössen vom <i>zweiten</i> Grade.	
α) Differenz von Linientheilen.	86
β) Product von Strecken	92
c) Grössen vom <i>dritten</i> Grade	96
$\mathfrak{B}$. Abgeleitet aus mehreren festen <i>Strecken und Punkten</i> .	
a) <i>Punkte</i> , aus Geraden (und Punkten)	100
b) <i>Zahlen</i> , aus Strecken (und Punkten)	116
2. Zusammengesetzte Grössen	129
b) <i>Vereine von Grössen</i> .	
$\mathfrak{A}$. Vereine von <i>abhängigen</i> Grössen.	
a. Mit <i>beschränkter</i> Gliederzahl. — Punktepaare und Linienpaare.	
1. Anharmonisches und harmonisches Verhältniss	133
2. Centralität und Polarität	137
b. Mit <i>unbeschränkter</i> Gliederzahl. — Punktreihen und Strahlenbüschel.	
1. <i>Ein</i> Verein	141
2. <i>Mehrere</i> Vereine	142

B. Vereine von beliebigen Grössen.

1. <i>Ein Verein</i>	146
2. <i>Mehrere Vereine.</i>	
a) <i>Allgemeine Beziehungen</i>	147
b) <i>Besondere Beziehungen</i>	
α) <i>Directe Verwandtschaften</i>	149
β) <i>Reciproke Verwandtschaften</i>	151

Verzeichniss der erklärten Ausdrücke	154
--	-----

Einleitung. *)

In der Ausdehnungslehre betrachten wir die aufeinander- 1. folgenden Zustände eines Dinges als verschieden. Die Aenderung, durch welche diese Zustände erzeugt werden, nennen wir *Bewegung*, und das Ding selbst in seinen verschiedenen Zuständen: *Punkt*. — Den Inbegriff einer ununterbrochenen (stetigen) Reihe solcher Zustände nennen wir ein *Gebilde*, und bezeichnen mit demselben Namen auch den Inbegriff der successiven Zustände eines bewegten Gebildes.

Anm. In der That erscheinen selbst im *Sprachgebrauche* Dinge aller Art als Punkte, sobald es sich um keine ihrer sonstigen Eigenschaften handelt, sondern nur um die Bewegung, welche die Dinge selbst machen müssen, um zu einander zu gelangen, oder unser Geist, um von einem zum andern zu kommen. In diesem Sinne werden z. B. Städte auf einer Landkarte, die Sterne am Himmel, Menschen, die wir aus grösserer horizontaler oder vertikaler Entfernung erblicken, ja selbst Landflächen, sobald nur ihre Oertlichkeit hervorgehoben wird, als Punkte aufgefasst und bezeichnet. — Dieselbe Abstraction aber, welche uns von der concreten Einheit zum Begriff der Zahl Eins führt, leitet uns auch von dem als Punkt aufgefassten Dinge zum Begriff des Punktes selbst.

Indem man einen Punkt sich bewegen lässt, und die von 2. ihm continuirlich durchlaufenen Zustände zu einem Begriffe vereinigt, erhält man ein *Gebilde* 1^{ter} Stufe. Ebenso entsteht aus einem bewegten Gebilde 1^{ter} Stufe ein *Gebilde* 2^{ter} Stufe u. s. f. — Die Bewegung, durch welche ein Gebilde hervorgegangen ist, haftet an ihm als eine Eigenschaft, die man *Ausdehnung* nennt. Hiernach hat der Punkt selbst (Gebilde 0^{ter} Stufe) *keine* Ausdehnung, ein Gebilde 1^{ter} Stufe *eine*, überhaupt ein Gebilde *n*^{ter} Stufe *n* Ausdehnungen.

Jede Bewegung kann *begrenzt* oder *unbegrenzt* gedacht 3. werden.

*) Vgl. Grassmann, Ausdehnungslehre I. Einleitung S. XXVII ff.

Im *ersten* Falle bilden der *Anfangs-* und der *Endzustand* des bewegten Gebildes die *Grenzen* für das erzeugte Gebilde. Durch diese Begrenzung erhält das erzeugte Gebilde die Eigenschaft der *Grösse*, vorausgesetzt, dass das bewegte Gebilde ebenfalls ein begrenztes war.

Anm. Uebereinstimmung in der Grösse heisst *Gleichheit*.

Ein Gebilde n^{ter} Stufe heisst also *begrenzt*, wenn es durch begrenzte Bewegung eines begrenzten Gebildes $(n - 1)^{\text{ter}}$ Stufe entstanden ist. — Durch unbegrenzte Bewegung eines begrenzten, oder durch begrenzte Bewegung eines unbegrenzten Gebildes entsteht ein *unvollkommen begrenztes* Gebilde; durch unbegrenzte Bewegung eines unbegrenzten Gebildes entsteht wieder ein *unbegrenztes*. — Das Element selbst kann als begrenztes Gebilde betrachtet werden. — Ein begrenztes Gebilde heisst kurz: *Grösse*.

Indem ein bewegtes Gebilde aus dem Endzustande auf dem vorigen Wege in den Anfangszustand zurückkehrt, erzeugt es dasselbe Gebilde höherer Stufe zum zweitenmale, nur in *umgekehrter Reihenfolge* der Zustände. Die neue Bewegung heisst: der ersten *entgegengesetzt*. Jedes durch Bewegung erzeugte Grössengebilde kann also auf 2 Entstehungsweisen zurückgeführt werden, die einander entgegengesetzt heissen.

Soll *zweitens* die Bewegung eines Gebildes *unbegrenzt* gedacht werden, so muss das erzeugende Gebilde *zwei entgegengesetzte* Bewegungen ausführen, da bei *einer* Bewegung *allein* sein Anfangszustand eine Grenze für das neue Gebilde sein würde. Durch die ursprüngliche Stellung des bewegten Gebildes wird also das neue Gebilde in *zwei Theile* getheilt, von denen man sagt, dass sie *auf beiden Seiten* des ersteren liegen. — Ein unbegrenztes Gebilde n^{ter} Stufe heisst ein *System* n^{ter} Stufe, und ist der Inbegriff aller Aenderungsweisen, welche ein unbegrenztes Gebilde $(n - 1)^{\text{ter}}$ Stufe bei vorgeschriebener Art der Bewegung erleiden kann. — Das Element kann auch als *System* 0^{ter} Stufe betrachtet werden.

Bewegt ein Gebilde sich so, dass es, ohne den früheren Weg zu durchlaufen, in den Anfangszustand zurückkehrt, so entsteht ein begrenztes Gebilde, dessen beide Grenzen zusammenfallen, und auf welchem unbegrenzte Bewegung ohne

Umkehr möglich ist, indem derselbe Weg unaufhörlich zurückgelegt werden kann.

Ein begrenztes Gebilde kann stets als Theil eines unbegrenzten von gleicher Stufe betrachtet werden; man erhält es aus dem letzteren, indem man zwei Zustände des bewegten Gebildes als Grenzen auf dem System festsetzt. — Umgekehrt kann ein unbegrenztes Gebilde als Fortsetzung eines begrenzten angesehen werden, und ist dann durch die beiden Grenzen des letzteren vollkommen bestimmt.

Es giebt eine *unbeschränkte Menge von Bewegungen*, 4. zwischen denen ein Punkt im Anfange seiner Aenderung die Wahl hat. Das unterscheidende Merkmal einer solchen Anfangsbewegung heisst ihre *Richtung*.

Fährt der Punkt in der einmal gewählten Anfangsbewegung fort, so heisst seine Gesamtbewegung *einfach*. Das Merkmal einer einfachen Bewegung ist also ebenfalls ihre Richtung.

Wählt aber der Punkt unablässig neue Anfangsbewegungen, so heisst seine Gesamtbewegung *zusammengesetzt*. Das Merkmal einer zusammengesetzten Bewegung ist ein Gesetz, nach welchem die beständige Aenderung der Richtung erfolgt.

Die Reihenfolge zwischen mehreren Bewegungen eines Punktes oder Gebildes ist für den Endzustand desselben gleichgiltig.

Durch die besondere Art der Bewegung erlangt das erzeugte Gebilde die Eigenschaft der *Gestalt*. Alle *einfachen* (d. h. durch einfache Bewegung entstandenen) Systeme gleicher Stufe haben hiernach gleiche Gestalt. Ueberhaupt haben Gebilde, welche durch dasselbe Bewegungsgesetz entstanden sind, gleiche Gestalt.

Anm. Uebereinstimmung in der *Gestalt* heisst *Aehnlichkeit*, in *Gestalt und Grösse*: *Congruenz*.

Auch ein Gebilde irgend welcher Stufe wird einer einfachen oder einer zusammengesetzten Bewegung unterworfen werden können. Ein Gebilde n^{ter} Stufe heisst *einfach*, wenn es durch einfache Bewegung eines einfachen Gebildes $(n - 1)^{\text{ter}}$ Stufe entstanden ist; andernfalls heisst es *zusammengesetzt*. Das *Element* selbst wird als *einfaches* Gebilde betrachtet.

Sowohl die Grössengebilde n^{ter} Stufe, als die Grenzen

derselben, welche Gebilde $(n - 1)^{\text{ter}}$ Stufe sind, werden an Systemen n^{ter} Stufe betrachtet. Demnach kann man sagen, ein System n^{ter} Stufe sei ein *Gebiet*, welches Grössen von höchstens n^{ter} , und Systeme von höchstens $(n - 1)^{\text{ter}}$ Stufe umfasst.

Die ersten Gebiete heissen ihrer Stufenfolge nach: Punkt, Gerade, Ebene, Raum.

Zur Bezeichnung der verschiedenen Gebilde bedient man sich einzelner Buchstaben, oder gesetzmässiger Vereinigungen von Buchstaben. Die Gebilde der vier ersten Gebiete können ausserdem durch Zeichnungen dargestellt werden, ebenso die zwischen diesen Gebilden herrschenden Beziehungen. Eine solche Zeichnung heisst *Construction*.

Erste Abtheilung.

Gebiet des Punktes.

I. Der Punkt als System.

5. Die verschiedenen Zustände eines *bewegten* Punktes nennen wir seine *Lagen*. Diese letzteren können wieder als selbständige *feste* Punkte betrachtet werden. Also:

1) Ein *bestimmter bewegter* Punkt ist gleichbedeutend mit einer Reihe *beliebiger fester* Punkte.

2) Ein *fester* Punkt hat das Merkmal einer bestimmten *Lage* und unterscheidet sich durch dieselbe von jedem anderen festen Punkte.

3) Ein Punkt, der anfangen soll, sich zu bewegen, kann nur seine *Lage* ändern.

II. Grössen im Gebiete des Punktes. — Die Punktgrösse.

6. Wenn ein Punkt e_1 gegeben ist, so sagen wir, eine Grösse A sei aus ihm *abgeleitet*, wenn

$$A = \alpha_1 \cdot e_1$$

ist, wo α_1 eine reelle Zahl ist. Es ist hiernach A eine einfache, oder vielfache *Punktgrösse*, die räumlich mit e_1 zu-

sammenfällt, und wir nennen A eine *Grösse ersten Grades*, insofern sie durch eine Gleichung ersten Grades aus e_1 bestimmt ist.

Anm. Es ist also zu unterscheiden zwischen dem reinen Ausdehnungsgebilde des Punktes und der mit dem Zahlenfactor behafteten Punktgrösse.

Für Punktgrössen, wie A , gelten nun alle Gesetze der 7. Rechnung mit Produkten, da man unter $\alpha_1 \cdot e_1$ nichts anderes versteht, als die Summe $e_1 + e_1 + \dots$ (α_1 mal). Es ist also:

$$\beta_1 \cdot A = (\alpha_1 \cdot \beta_1) e_1; \quad A : \beta_1 = (\alpha_1 : \beta_1) \cdot e_1; \quad e_1 = A : \alpha_1; \\ \alpha_1 = A : e_1;$$

ferner, wenn $B = \beta_1 e_1$ ist, wobei A und B *gleichnamig* heissen:

$$A \pm B = (\alpha_1 \pm \beta_1) e_1;$$

$$A : B = (\alpha_1 e_1) : (\beta_1 e_1) = (\alpha_1 : \beta_1) \cdot (e_1 : e_1) = \alpha_1 : \beta_1,$$

da $e_1 = 1 \cdot e_1$; also $e_1 : e_1 = 1$ ist; d. h.:

Produkt und Quotient aus einer Punktgrösse und einer Zahl ist eine gleichnamige Punktgrösse.

Summe und Differenz von gleichnamigen Punktgrössen ist wieder eine gleichnamige Punktgrösse.

Der Quotient zweier gleichnamigen Punktgrössen ist eine Zahl.

Der Inbegriff aller aus dem Punkte e_1 ableitbaren Grössen 8. heisst sein *Gebiet*. Räumlich fällt dieses Gebiet mit e_1 zusammen. Verschiedene Punkte sind daher ebenso viele verschiedene Gebiete.

Zwischen zwei Punktgebieten, die aus e_1 resp. e_2 abgeleitet sind, giebt es kein *gemeinsames* Gebiet; dagegen heisst das aus e_1 und e_2 abgeleitete Gebiet ihr *verbindendes* Gebiet.

Wenn $A = \alpha_1 e_1$ und $B = \beta_1 e_1$, so ist

$$\beta_1 A = \alpha_1 \beta_1 e_1$$

und

$$\alpha_1 B = \alpha_1 \beta_1 e_1$$

folglich

$$\beta_1 A = \alpha_1 B,$$

d. h.: *Zwischen zwei gleichnamigen Punktgrössen besteht stets eine Zahlbeziehung.*

Aus $\beta_1 A = \alpha_1 B$ folgt weiter:

$$A = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot B; \quad B = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot A,$$

d. h.: Jede Grösse im Gebiete des Punktes e_1 kann statt aus e_1 auch aus jeder anderen Grösse desselben Gebietes abgeleitet werden.

Setzt man $e_1 = 1$; so heisst e_1 eine *Einheit erster Stufe*, und es kann nun jede Grösse im Gebiete des Punktes e_1 als einfache Zahl ausgedrückt werden.

Zwei Punktgrössen sind gleich, wenn ihre Zahlenfactoren (Coefficienten) gleich sind, und sie in demselben Punktgebiete liegen.

Zweite Abtheilung.

Gebiet der Geraden.

I. Die Gerade als System.

9. 1. Bestimmung durch einen beweglichen Punkt.

Wenn ein Punkt seine Lage durch einfache Bewegung ändert, so heisst das von ihm erzeugte Gebilde (sein Weg): eine *Gerade* (gerade Linie).

Die Eigenschaften einer Geraden sind bestimmt:

1. Durch die *Lage* eines sie erzeugenden Punktes.

2. Durch die beständige *Richtung* der Bewegung dieses Punktes.

Die Merkmale einer Geraden sind hiernach: *Lage* und *Richtung*.

Jeder Punkt auf derselben Geraden kann als erzeugender angenommen werden. Jeder dieser Punkte *theilt* daher die Gerade in zwei Theile, und kann sich in zwei entgegengesetzten Richtungen auf ihr bewegen.

Jede Gerade repräsentirt demnach *zwei* entgegengesetzte *Richtungen*, und eine *bestimmte Classe* von *Lagen*.

Durch *einen* beliebigen Punkt auf ihr ist die *Lage* einer Geraden, durch *einen zweiten* auch ihre *Richtung* bestimmt, da dieser zweite als eine spätere Lage des ersten, bewegten, betrachtet werden kann, also auch die Richtung der Bewegung bezeichnet.

Eine *Gerade* und ein *Punkt* haben also *dieselbe Lage*, wenn der Punkt *auf* der Geraden, *verschiedene Lage*, wenn

der Punkt *ausserhalb* der Geraden liegt. — Eine Gerade, welche anfangen soll, sich zu bewegen, kann also entweder ihre *Lage* oder ihre *Richtung* ändern.

2. Bestimmung durch mehrere feste Punkte. 10.

Eine beliebige feste Gerade a ist durch zwei beliebige ihrer Punkte, A, B , vollkommen bestimmt. — Sie ist es noch, wenn man A mit B vertauscht. Durch diese Vertauschungsfähigkeit ist ihre zweifache Richtung ausgedrückt. —

Hiernach ist die Ableitung einer Geraden aus zwei Punkten *vergleichbar* der Ableitung einer Summe aus zwei Summanden; wir können daher sagen:

$A + B = a$; Die Summe zweier Punktsysteme A und $B + A = a$. B ist die durch sie bestimmte Gerade a .

Sind drei Punkte auf der Geraden gegeben, A, B, C , so ist die Gerade schon durch zwei beliebige davon bestimmt. Also:

wenn $A + (B + C) = B + (C + A) = C + (A + B) = a$,
so ist: $B + C = C + A = A + B = a$.

Aus den letzten beiden Formeln folgt noch

$$A + a = a.$$

Dies ist die *Bedingung*, unter welcher ein Punkt A auf einer Geraden a liegt.

Betrachtet man in der letzten Formel A und a als *Grössen*, so muss entweder $a = \infty$, oder $A = 0$ gesetzt werden; d. h.: die Gerade enthält eine unbestimmte Menge von Punkten; der Punkt hat, mit der Geraden verglichen, keine Grösse.

Anm. Die *Construction* einer Geraden aus zwei auf ihr gegebenen Punkten wird mit Hülfe des Lineals ausgeführt.

II. Grössen im Gebiete der Geraden.

A. Abgeleitet aus einem beweglichen Punkte. — Die Strecke.

a) Einmalige Bewegung des Punktes. — Eine Strecke.

Durch begrenzte Bewegung eines Punktes entsteht ein 11.
die Lagenänderung des Punktes bezeichnender Theil einer

Geraden, der *Strecke* genannt wird. Dieselbe ist vollkommen begrenzt, also eine Grösse, weil der sie erzeugende Punkt selbst vollkommen begrenzt ist (als Grösse betrachtet). — Als Grenze an der Strecke heisst ein Punkt: *Endpunkt*.

01. Eine Strecke a ist durch ihre beiden Endpunkte A , B vollkommen bestimmt. Als vollkommen begrenztes Gebilde ist sie namentlich auch ihrer Grösse nach bestimmt. — Aber als Grösse betrachtet darf sie keine Zweideutigkeit in Bezug auf ihre Richtung enthalten. Nun erhält sie durch Vertauschung von A und B die *entgegengesetzte Richtung*.

Also *entspricht* die Ableitung einer *Strecke* aus *zwei Punkten* der Ableitung einer Differenz aus Minuend und Subtrahend; wir können daher sagen:

$$\begin{array}{ll} A - B = a & \text{Die Differenz (Entfernung) zweier} \\ B - A = (-a). & \text{Punkte } A \text{ und } B \text{ ist die durch die-} \\ & \text{selben bestimmte Strecke } a. \end{array}$$

b) Mehrmalige Bewegung des Punktes. — Mehrere Strecken.

12. Wenn ein Punkt von A nach B , und dann von B nach C sich bewegt, so legt er im Ganzen die Strecke von A nach C zurück. Da nun

$$\overbrace{A \quad \quad \quad B \quad \quad \quad C} \quad (A - B) + (B - C) = (A - C),$$

so ist die letztere Strecke die *Summe* der beiden ersteren; d. h.: *die Summe zweier mit ihren einen Endpunkten aneinander gelegten Strecken ist die Strecke zwischen ihren anderen Endpunkten.*

13. Durch Anwendung des Begriffs der *Subtraction* findet man:

$$(A - B) = (A - C) - (B - C).$$

d. h.: *Die Differenz zweier mit ihren einen Endpunkten aufeinander gelegten Strecken ist die Strecke zwischen ihren anderen Endpunkten.*

14. Fallen die Punkte A und B zusammen, d. h. ist $A = B$, so ist

$$\overbrace{A \quad \quad \quad C} \quad (A - A) = (A - C) - (A - C) = 0.$$

15. Fallen die Punkte A und C zusammen, d. h. ist $A = C$, so ist

$$(A - B) = (A - A) - (B - A) \quad \begin{array}{c} A \\ | \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ | \\ \hline \end{array}$$

$$= -(B - A)$$

Strecken mit entgegengesetzter Richtung werden also behandelt wie Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen.

Aus 15. folgt noch:

$$(A - B) + (B - A) = 0$$

und die Formel 13. lässt sich in folgenden drei Formen schreiben:

$$(A - B) = (A - C) + (C - B) \quad \begin{array}{c} A \qquad C \qquad B \\ | \qquad | \qquad | \\ \hline \end{array}$$

$$(B - C) = (B - A) + (A - C) \quad \begin{array}{c} B \qquad A \qquad C \\ | \qquad | \qquad | \\ \hline \end{array}$$

$$(A - C) = (B - C) + (A - B). \quad \begin{array}{c} A \qquad B \qquad C \\ | \qquad | \qquad | \\ \hline \end{array}$$

Alle drei aber geben:

$$(A - B) + (B - C) + (C - A) = 0,$$

womit die Ausdehnung unserer Betrachtung auf mehr als zwei Strecken eingeleitet wird.

Anwendung des Begriffs der *Multiplication*. — Seien n 17.
Strecken auf einer Geraden: $(A - B)$, $(B - C)$, $(C - D) \dots$
 $(M - N)$ einander gleich, so kann, wenn

$$(A - B) = (B - C) = \dots = (M - N) = a$$

ist, die Summe derselben:

$$\begin{array}{c} A \quad B \quad C \qquad \qquad \qquad M \quad N \\ | \quad | \quad | \qquad \qquad \qquad | \quad | \\ \hline \end{array}$$

$$A - N = n \cdot a$$

gesetzt werden. Sei

$$A - N = s,$$

so ist:

$$s = n \cdot a,$$

oder:

$$s : a = n,$$

d. h.: Der Quotient zweier Strecken auf derselben Geraden ist eine Zahl.

c) Bewegung einer Strecke auf einer Geraden.

Bewegt eine Strecke a sich beliebig auf einer Geraden 18.
vorwärts, und ist $(A - B)$ ihre Anfangs-, $(A_1 - B_1)$ ihre
Endstellung, so erleidet der Lagenunterschied ihrer End-
punkte keine Veränderung; also ist:

$$\begin{array}{c} A \qquad B \qquad A_1 \qquad B_1 \\ \hline \end{array} \quad (A - B) = (A_1 - B_1).$$

Hieraus folgt:

$$(A - A_1) = (B - B_1);$$

und umgekehrt,

d. h.: *Anfangs- und Endpunkt einer bewegten Strecke legen gleiche Strecken zurück.*

Wenn zwei Punkte gleiche Strecken auf einer Geraden zurücklegen, so bleibt ihre Entfernung ungeändert.

Anm. Die Construction einer Strecke $(A_1 - B_1)$, die mit einer gegebenen $(A - B)$ gleich ist, geschieht mit Hilfe des Cirkels.

19. Sei $(A - B) = a$; $(A - A_1) = b$.

Dann ist

$$A = B + a = A_1 + b,$$

d. h.: *Die Summe aus einer Strecke und ihrem Endpunkte ist ihr Anfangspunkt.*

Ferner: $B = A - a$; $A_1 = A - b$,

d. h.: *Die Differenz aus dem Anfangspunkte und der Strecke ist der Endpunkt.*

Ferner:

$$B - A_1 = b - a; \quad A - B_1 = a + b.$$

20. Die Formeln in 18. werden gleichlautend, wenn

$$A_1 = B = M; \quad \text{also} \quad a = b.$$

Beide lauten dann:

$$\begin{array}{c} A \qquad M \qquad B_1 \\ \hline \end{array} \quad A - M = M - B_1,$$

d. h.: M ist von A und B_1 gleichweit entfernt. M heisst der *Mittelpunkt* zwischen A und B_1 , oder der *Halbirungspunkt* der Strecke $(A - B_1)$.*)

Aus der letzten Formel folgt:

$$A + B_1 = M + M = 2M; \quad \text{Die halbe Summe zweier Punkte}$$

oder: $M = \frac{A + B_1}{2}.$ *stellt ihren Mittelpunkt dar.*

Ferner ist in diesem Falle:

$$(B - A_1) = 0; \quad (A - B_1) = 2a; \quad \text{Der Halbirungspunkt theilt}$$

oder: $a = \frac{(A - B_1)}{2}$ *die Strecke in zwei gleiche Theile.*

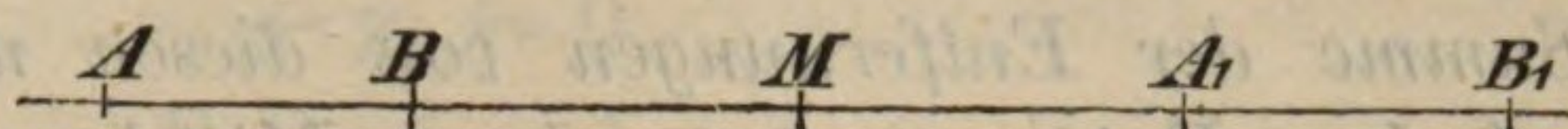
*) Vgl. G. A. II, 225.

Die Formeln in 18. kann man übereinstimmend schreiben: 21.

Wenn zwei Strecken
einander gleich sind,
so haben die Strecken
zwischen dem Anfangs-
punkte der einen und
dem Endpunkte der
anderen denselben Hal-
birungspunkt.

$$A + B_1 = B + A_1;$$

$$\frac{A + B_1}{2} = \frac{B + A_1}{2} = M.$$



Die Formel $A - M = M - B_1$ lässt sich auch schreiben: 22.

$$(M - B_1) + (M - A) = 0.$$

Nunmehr lässt sich der Begriff des Mittelpunktes dahin er-
weitern, dass man sagt: Für n Punkte $A, B, C, \dots N$ auf
einer Geraden ist derjenige Punkt der Mittelpunkt, welcher
der Bedingung genügt:

$$(M - A) + (M - B) + \dots + (M - N) = 0.$$

oder:

$$M = \frac{A + B + \dots + N}{n}.$$

Strecken, die *nicht* aneinander liegen, werden erst nach 23.
18. aneinandergelegt und dann nach 12. addirt.

Sei die Summe von n Strecken gleich Null; also: 24.

$$(A - B) + (C - D) + (E - F) + \dots = 0.$$

Dann können wir alle diese Strecken durch die Entfernungen
ihrer Endpunkte von einem einzigen *beliebigen festen* Punkte
 R ausdrücken, indem wir setzen:

$$(A - B) = (R - B) - (R - A).$$

$$(C - D) = (R - D) - (R - C).$$

$$\dots$$

sodass:

$$(R - A) + (R - C) + (R - E) + \dots$$

$$= (R - B) + (R - D) + (R - F) + \dots$$

d. h.: Wenn eine Reihe von n Strecken auf einer Geraden
die Summe Null giebt, so ist für jeden beliebigen Punkt der
Geraden die Summe der Entfernungen von den Anfangspunk-
ten gleich der Summe der Entfernungen von den Endpunkten.

Ist $B = D = F = \dots = M$; so haben wir: 25.

$$(R - A) + (R - C) + (R - E) + \dots = n(R - M),$$

oder: $nM = A + C + E + \dots$

oder: $M = \frac{A + C + E + \dots}{n}$,

d. h.: Wenn auf einer Geraden eine Reihe von n Punkten gegeben ist, so ist für jeden beliebigen Punkt der Geraden die Summe der Entfernungen von diesen n Punkten gleich der n -fachen Entfernung von deren Mittelpunkt.

Anm. Die Aufgabe: die Mitte zwischen einer Anzahl gegebener Punkte zu suchen, ist hierdurch zurückgeführt auf die Aufgabe: eine gegebene Strecke in n gleiche Theile zu theilen.

B. Abgeleitet aus zwei festen Punkten.

a) Grössen vom 1^{ten} Grade.

26. Seien e_1 und e_2 zwei feste Punkte auf der Geraden, A ein beliebiger Punkt, und sei

$$\frac{e_1}{1} \quad \frac{A}{\alpha_1} \quad \frac{e_2}{1} \quad (e_1 - A) = \alpha_2 (e_1 - e_2),$$

worin α_2 stets bestimmt ist, da der Quotient zweier Strecken auf derselben Geraden eine Zahl ist; dann erhält man:

$$A = (1 - \alpha_2) e_1 + \alpha_2 e_2$$

oder, wenn man

$$1 - \alpha_2 = \alpha_1; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

setzt:

$$A = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2.$$

Der Punkt A heisst nun „linear abgeleitet aus e_1 und e_2 “, da er durch eine Gleichung vom ersten Grade in e bestimmt ist. — Und die letzte Gleichung stellt allemal einen einfachen oder n -fachen Punkt dar, je nachdem $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ oder $= n$ ist, wie sogleich erhellt, wenn man sie Glied für Glied mit n multiplicirt.

Sind α_1 und α_2 beide < 1 , so sind beide positiv, und wir sagen: A liege zwischen e_1 und e_2 . Der Inbegriff aller einfachen Punkte, welche dieser Bedingung genügen, heisst ein *Zweieck*. Dasselbe fällt mit der Strecke $(e_1 - e_2)$ zusammen.

Ist aber $\alpha_1 > 1$ und positiv, so ist α_2 negativ, und A liegt ausserhalb der Strecke $(e_1 - e_2)$.

Sei ein anderer Punkt B gegeben, mit der Gleichung:

$$B = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, \quad (\beta_1 + \beta_2 = 1),$$

dann ist:

$$(A - B) = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2,$$

oder, wenn wir setzen:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \gamma_1 \quad ; \quad \alpha_2 - \beta_2 = \gamma_2,$$

woraus folgt:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

$$(A - B) = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2,$$

d. h.: Der Ausdruck $\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$ stellt eine Strecke dar, wenn $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ ist. — Sind A und B n fache Punkte, so ist auch $(A - B)$ eine n fache Strecke.

Ist demnach $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, so stellt a eine Punktgrösse oder eine Strecke dar, je nachdem $\alpha_1 + \alpha_2$ ungleich oder gleich Null ist. Da a durch eine Gleichung 1^{ten} Grades in e_1 und e_2 abgeleitet ist, so sind *Punktgrössen und Strecken Grössen vom 1^{ten} Grade*. — Da A und B beliebige Punkte der Geraden sind, so ist auch jede beliebige Strecke auf ihr, $(A - B)$ aus e_1 und e_2 ableitbar.*)

Für Grössen 1^{ten} Grades, wie a , gelten nun alle Gesetze 27. der Rechnung mit Summen von Producten. Es ist also:

$$\delta \cdot a = (\alpha_1 \delta) e_1 + (\alpha_2 \delta) e_2 \quad ; \quad a : \delta = (\alpha_1 : \delta) e_1 + (\alpha_2 : \delta) e_2.$$

Ferner, wenn $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ ist:

$$(a \pm b) = (\alpha_1 \pm \beta_1) e_1 + (\alpha_2 \pm \beta_2) e_2.$$

Endlich, wenn noch $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ und $\beta_1 + \beta_2 = 0$, oder $\alpha_2 = -\alpha_1$; $\beta_2 = -\beta_1$ ist:

$$a : b = [\alpha_1 (e_1 - e_2)] : [\beta_1 (e_1 - e_2)] = \alpha_1 : \beta_1,$$

d. h.: *Product und Quotient aus einer Grösse 1^{ten} Grades und einer Zahl ist wieder eine Grösse 1^{ten} Grades.*

Summe und Differenz von Grössen 1^{ten} Grades auf derselben Geraden ist wieder eine Grösse 1^{ten} Grades.

Der Quotient zweier Strecken auf derselben Geraden ist eine Zahl.

Anm. Der Quotient zweier Punktgrössen auf derselben Geraden ist nur dann eine Zahl, wenn die Punktgrössen zusammenfallen. Denn der Quotient $a : b$ reducirt sich nur dann auf $\alpha_1 : \beta_1$, wenn $\alpha_2 \beta_1 = \alpha_1 \beta_2$ oder $\beta_1 - \alpha_1 \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_1 \beta_1$, d. h. wenn $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 = \beta_2$ ist. Hiervon überzeugt man sich durch Ausführung der Division zwischen den Werthen von a und b .

*) Vgl. G. A. II. 234. 235.

28. Der Inbegriff aller aus e_1 und e_2 ableitbaren Grössen ist ihr Gebiet. Dasselbe heisst Gebiet 2^{ter} Stufe, und fällt räumlich mit der durch e_1 und e_2 bestimmten Geraden zusammen.

Zwei Geraden, die aus $e_1 e_2$, resp. $e_3 e_4$ abgeleitet sind, haben *kein* gemeinsames Gebiet, wenn keine dieser vier Grössen aus den anderen abgeleitet werden kann. Ihr verbindendes Gebiet ist das aus $e_1 e_2 e_3 e_4$ abgeleitete, also 4^{ter} Stufe.

Zwei Geraden, welche aus $e_1 e_2$, resp. $e_2 e_3$ abgeleitet sind, haben ein gemeinsames Gebiet 1^{ter} Stufe (e_2); ihr verbindendes Gebiet ist das aus $e_1 e_2 e_3$ abgeleitete, also 3^{ter} Stufe. Alles unter der Voraussetzung, dass keine der drei Grössen aus den anderen ableitbar ist.

Wenn

$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$; $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$; $c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$,
so ist:

$$\beta_1 a - \alpha_1 b = (\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2) e_2;$$

$$\gamma_1 b - \beta_1 c = (\gamma_1 \beta_2 - \beta_1 \gamma_2) e_2,$$

also:

$$a \beta_1 (\gamma_1 \beta_2 - \beta_1 \gamma_2) - b \alpha_1 (\gamma_1 \beta_2 - \beta_1 \gamma_2)$$

$$= b \gamma_1 (\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2) - c \beta_1 (\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2),$$

oder:

$$a (\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2) + b (\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2) + c (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) = 0,$$

d. h.: *zwischen drei Grössen 1^{ten} Grades auf derselben Geraden besteht stets eine Zahlbeziehung.* — Jede dieser drei Grössen kann also aus den beiden anderen abgeleitet werden.

1) a, b, c seien Punkte. — Dann zeigt die letzte Gleichung die Ableitung *eines Punktes aus zwei anderen.*

2) a sei Strecke, b, c Punkte. — Dann ist $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$;
also:

$$a (\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2) - b \alpha_1 (\gamma_1 + \gamma_2) + c \alpha_1 (\beta_1 + \beta_2) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt die Ableitung *einer Strecke aus zwei Punkten*, und *eines Punktes aus Strecke und Punkt.*

3) a, b seien Strecken, c ein Punkt. — Dann ist auch $\beta_1 + \beta_2 = 0$, und:

$$a \beta_1 (\gamma_1 + \gamma_2) - b \alpha_1 (\gamma_1 + \gamma_2) = 0;$$

oder, da $\gamma_1 + \gamma_2$ nicht Null ist:

$$a \beta_1 = b \alpha_1.$$

Diese Gleichung zeigt die Ableitung *einer Strecke aus einer anderen*.

Es besteht also schon zwischen zwei Strecken auf derselben Geraden eine Zahlbeziehung, wie schon oben ermittelt wurde.

b) Grössen vom 2^{ten} Grade.*)

Das Product zweier Grössen 1^{ten} Grades ist eine Grösse 2^{ten} Grades. — Seien zwei Grössen 1^{ten} Grades gegeben:

$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$; $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$,
dann ist:

$$ab = \alpha_1 \beta_1 (e_1 e_1) + \alpha_1 \beta_2 (e_1 e_2) + \alpha_2 \beta_1 (e_2 e_1) + \alpha_2 \beta_2 (e_2 e_2).$$

Das Product der Grössen ist also auf die Producte einfacher Punkte zurückgeführt, und es kommt darauf an, die letzteren zu definiren.**)

Unter dem Producte zweier Punkte e_1 und e_2 ($e_1 e_2$) verstehen wir einen *Linientheil* (Theil der Geraden), welcher mit der Strecke ($e_1 - e_2$) gleich lang und gleich gerichtet ist.

Anm. Die *Strecke* erscheint also als Lagenunterschied zweier *Punkte*, der *Linientheil* als Theil der durch diese Punkte bestimmten *Geraden*. Die *Strecke* ist eine arithmetische Grösse, der *Linientheil* ein reines Ausdehnungsgebilde.

Hiernach ist die Multiplication zweier Grössen 1^{ten} Grades zunächst durch das Gesetz zu bestimmen:

$$(e_1 e_1) = 0,$$

woraus auch $(e_2 e_2) = 0$ folgt. Es bleibt also:

$$ab = \alpha_1 \beta_2 (e_1 e_2) + \alpha_2 \beta_1 (e_2 e_1).$$

Nun sind folgende Fälle möglich:

1) a und b sind *vielfache Punkte*. — Wenn a und b zusammenfallen, so ist $a = \lambda b$; folglich $\alpha_1 = \lambda \beta_1$; $\alpha_2 = \lambda \beta_2$, und man erhält:

$$0 = ab = \lambda \beta_1 \beta_2 [(e_1 e_2) + (e_2 e_1)],$$

woraus folgt:

$$(e_1 e_2) + (e_2 e_1) = 0,$$

oder:

$$(e_1 e_2) = - (e_2 e_1).$$

*) Vgl. G. A. I. § 28—30.

**) Die verschiedenen Multiplicationsgattungen hat Grassmann behandelt in Crelle's Journal Bd. 49. S. 123.

Dies ist das zweite der Gesetze unserer Multiplication, in welchem übrigens das erste enthalten ist, wie man sieht, wenn man $e_1 = e_2$ annimmt. — Die Multiplication heisst *äussere*, da die Punkte ausser einander liegen müssen, wenn ihr Product einen geltenden Werth haben soll.

Das Product ab nimmt nun folgende Gestalt an:

$$ab = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (e_1 e_2),$$

d. h.: *Das Product zweier vielfachen Punkte ist ein vielfacher Linientheil.* — Es ist nur dann Null, wenn $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$, d. h. wenn a und b in einen Punkt zusammenfallen.

2) a ist eine Strecke, b ein vielfacher Punkt. — In diesem Falle ist $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, also:

$$ab = \alpha_1 (\beta_1 + \beta_2) (e_1 e_2),$$

d. h.: *Das Product aus einer Strecke und einem Punkte ist ein Linientheil.*

3) a und b sind Strecken. — Dann ist auch $\beta_1 + \beta_2 = 0$, und es bleibt:

$$ab = 0;$$

d. h.: *Das Product zweier Strecken in derselben Geraden ist Null.*

30. Bezeichnen wir die Strecke $(e_1 - e_2)$ mit s , sodass

$$s = (e_1 - e_2);$$

dann ist:

$$s \cdot e_2 = (e_1 - e_2) e_2 = (e_1 e_2) - (e_2 e_2) = (e_1 e_2),$$

$$s \cdot e_1 = (e_1 - e_2) e_1 = (e_1 e_1) - (e_2 e_1) = - (e_2 e_1) = (e_1 e_2).$$

Demnach ist ein Linientheil das Product aus der ihm entsprechenden Strecke und ihrem Anfangs- oder Endpunkte. *)

Anm. Wie die Zahl als Grössen bildender Factor am Punkte, so haftet an diesem in gleicher Eigenschaft auch die Strecke. Es entsprechen sich also in den beiden Gebieten des Punktes und der Geraden: Punkt und Linientheil, Zahl und Strecke. Und wie die Zahlencoefficienten zweier gleich grosser Punktgrössen auch dann gleich sind, wenn diese letzteren in verschiedenen Gebieten liegen, so auch die Streckencoefficienten zweier gleich grosser Linientheile, wenn diese in verschiedenen Gebieten liegen.

Sei $(e_1 e_2) = (e_1 - e_2) e_2 = (e_1 - e_2) e_1$
und ausserdem:

$$(e_3 e_4) = (e_3 - e_4) e_4 = (e_3 - e_4) e_3;$$

*) Vgl. G. A. I. § 114. 115.

ferner: $s = (e_1 - e_2) = (e_3 - e_4).$

Dann ist:

$$(e_1 e_2) - (e_3 e_4) = s e_2 - s e_4 = s(e_2 - e_4) = s e_1 - s e_3 = s(e_1 - e_3).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird Null, sobald die Strecken s mit den Strecken $(e_2 - e_4)$ und $(e_1 - e_3)$ in derselben Geraden liegen, d. h. sobald die vier Punkte e_1, e_2, e_3, e_4 in derselben Geraden liegen. Nur unter dieser Bedingung ist also:

$$(e_1 e_2) = (e_3 e_4).$$

Zwei Linientheile sind also gleich, wenn die entsprechenden Strecken gleich sind und in derselben Geraden liegen.*)

Sei ab ein Linientheil, und

31.

$$a + \beta b = a_1;$$

dann ist:

$$a_1 b = a b.$$

Sei ferner:

$$b + \alpha a_1 = b_1;$$

dann ist:

$$a_1 b_1 = a_1 b = a b.$$

Man sagt dann, a_1 sei durch lineale Aenderung aus a , und b_1 ebenso aus b abgeleitet.

Ein Linientheil ändert also seinen Werth nicht, wenn seine Factoren lineale Aenderungen erleiden.

Setzt man $(e_1 e_2) = 1$, so kann man jede Grösse, die hieraus abgeleitet ist, durch eine Zahl bezeichnen; $(e_1 e_2)$ heisst nun Längen- (Linien-) Einheit, und ist eine Einheit 2^{ter} Stufe. Die daraus abgeleiteten Grössen heissen einfach, wenn sie als Producte von zwei Grössen 1^{ter} Stufe darstellbar sind; sonst zusammengesetzt.

Ferner heisst nun e_2 die Ergänzung von e_1 ; in Zeichen:

$$e_2 = | e_1.$$

und, da $-(e_2 e_1) = 1$, so ist

$$-e_1 = | e_2.$$

Daraus folgt noch:

$$\| e_1 = | e_2 = -e_1.$$

Anm. Das Zeichen $|$, als Factor betrachtet, entspricht also dem Factor i (der imaginären Einheit).

*) Vergl. G. A. II. 247. 248.

Setzen wir in der Formel $(e_1 e_2) = 1$ den Werth $e_2 = | e_1$ ein, so folgt:

$$[e_1 | e_1] = 1;$$

ebenso:

$$[e_2 | e_2] = 1;$$

und

$$[e_1 | e_2] = - (e_1 e_1) = 0; \quad [e_2 | e_1] = (e_2 e_2) = 0.$$

Die Multiplication mittelst des Zeichens $|$, welche durch die eben gefundenen Gesetze bestimmt ist, heisst *innere* Multiplication, weil dabei, wie man sieht, das Product zweier Grössen nur dann einen geltenden Werth hat, wenn dieselben nicht aussereinander liegen.

Wenn $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ ist, so verstehen wir unter $| a$ die Grösse $\alpha_1 | e_1 + \alpha_2 | e_2$. Es ist also:

$$| a = \alpha_1 | e_1 + \alpha_2 | e_2 = \alpha_1 e_2 - \alpha_2 e_1$$

und

$$[a | a] = \alpha_1^2 (e_1 e_2) - \alpha_2^2 (e_2 e_1) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Man nennt $[a | a]$ das *innere Quadrat* von a , schreibt:

$$[a | a] = a^2$$

und nennt $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ den *numerischen Werth* von a .

Wenn

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \quad \text{und} \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2,$$

so ist:

$$[a | b] = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$$

und

$$[a | b] = [b | a],$$

d. h.: *im inneren Producte gilt Vertauschung der Factoren.*

Dritte Abtheilung.

Gebiet der Ebene.

I. Die Ebene als System.

1. Bestimmung durch eine bewegliche Gerade.

a) Lagenänderung der Geraden.

33. Hat eine Gerade ihre Lage geändert, so darf kein Punkt zugleich auf der ersten und zweiten Geraden liegen; sonst könnte dieser Punkt beide Geraden erzeugen; d. h. sie hätten dieselbe Lage. — Die Lagenänderung der Geraden kann

Schiebung genannt werden. — Jeder Punkt der ersten Geraden wird also seine Lage geändert haben, ehe er sich in derjenigen Lage befindet, in der er der zweiten angehört.

Anm. Wie die *Lage* einer Geraden durch einen beliebigen Punkt auf ihr vollkommen bestimmt ist, so auch ihre *Lagenänderung* durch diejenige eines beliebigen Punktes auf ihr.

Die Bewegung der Geraden nennen wir *einfach*, wenn diejenige jedes beliebigen Punktes auf ihr eine einfache ist, d. h. wenn jeder beliebige Punkt auf ihr eine beliebige Gerade beschreibt.

Wenn eine Gerade ihre Lage durch *einfache* Bewegung ändert, so heisst das von ihr erzeugte Gebilde eine *Ebene* (ebene Fläche).

Die Eigenschaften einer Ebene sind bestimmt:

1) durch *Lage* und *Richtung* einer sie erzeugenden Geraden;

2) durch *Lage* und *Richtung* einer zweiten Geraden, die von einem der ersten angehörigen Punkte beschrieben wird;

oder, da man beide Geraden durch *dieselbe Lage* bestimmen kann:

1) durch *Lage* und *Richtung* einer sie erzeugenden Geraden;

2) durch die *Lage* eines *beliebigen festen*, ausserhalb dieser Geraden in der Ebene liegenden *Punktes*;

oder, wenn man auch die in 1) genannte Gerade durch zwei Punkte ersetzt:

1) durch die *Lagen dreier* nicht in derselben Geraden liegenden *Punkte*.

Die Merkmale einer Ebene sind hiernach vorläufig:

Eine Lage und *zwei Richtungen*; oder *zwei Lagen* und *eine Richtung* *); oder *drei Lagen*.

b) Richtungsänderung der Geraden.

Wenn eine Gerade sich so bewegt hat, dass sie dabei ^{34.} *nur* ihre *Richtung* änderte, so giebt es unter allen Umständen *einen* Punkt auf ihr, der an der Bewegung nicht Theil nahm,

*) Unter diese Rubrik fällt auch die Bestimmung der Ebene durch Anfangs- und Endstellung der bewegten Geraden.

den also die zweite Gerade mit der ersten gemeinsam hat. Denn gäbe es *keinen* solchen Punkt, so hätten die beiden Geraden nicht dieselbe Lage; gäbe es aber deren *mehr als einen*, so wären beide Geraden in derselben Weise bestimmt, also hätte keine Bewegung stattgefunden. — Die Richtungsänderung der Geraden kann *Drehung* genannt werden, der ruhende Punkt: *Drehungspunkt*. — Die Bewegung der Geraden wird *einfach* sein, wenn ein beliebiger Punkt auf ihr in jedem Augenblicke die Richtung auf einen bestimmten beweglichen Punkt auf der zweiten Geraden innehält. *)

Es sind also Schiebung und Drehung zwei verschiedene Arten einfacher Bewegung, denen eine Gerade unterworfen werden kann.

Die Eigenschaften des durch einfache Drehung einer Geraden erzeugten Gebildes sind bestimmt:

- 1) durch *Lage* und *Richtung* der erzeugenden Geraden,
- 2) durch *Lage* und *Richtung* einer zweiten Geraden, die mit der ersten dieselbe Lage hat;

oder, da man beide Geraden durch dieselbe Lage bestimmen kann:

- 1) durch *Lage* und *Richtung* der erzeugenden Geraden,
- 2) durch die *Lage* eines (bestimmten beweglichen) ausserhalb dieser Geraden in der Ebene liegenden Punktes;

oder, wenn man auch die in 1) genannte Gerade durch zwei Punkte ersetzt:

- 1) durch die *Lagen* dreier nicht in derselben Geraden liegenden Punkte. Diese Eigenschaften stimmen aber genau mit denen der Ebene überein, folglich ist das durch einfache Drehung einer Geraden erzeugte Gebilde ebenfalls eine *Ebene*.

*) Denn da ein *beliebiger fester* Punkt mit einem *bestimmten beweglichen* Punkte gleichbedeutend ist, so ist die Bewegung der Geraden in diesem zweiten Falle im Wesentlichen ebenso definirt wie im ersten, nämlich als einfache. — Die Bewegung eines ihrer Punkte kann aber diesmal natürlich keine einfache sein; denn nur dann, wenn die Gerade jenes Merkmal ändert, welches sie mit dem Punkte gemeinsam hat, nämlich die *Lage*, werden beide Gebilde in der Einfachheit der Bewegung übereinstimmen.

Anm. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass *allgemein* die Gesetze gelten:

1) Zwei Geraden mit *derselben Lage* haben stets *ungleiche Richtung*.
2) Zwei Geraden mit *gleicher Richtung* haben stets *verschiedene Lage*. Da aber eine Gerade durch zwei aufeinanderfolgende Bewegungen Lage und Richtung ändern kann, wobei sie das Gebiet der Ebene verlässt, so gelten nur für zwei *in derselben Ebene* liegende Geraden die umgekehrten Gesetze:

3) Zwei Geraden mit *verschiedener Lage* haben *gleiche Richtung*.

4) Zwei Geraden mit *ungleicher Richtung* haben *dieselbe Lage*.

In derselben Ebene also können zwei Geraden nicht gleichzeitig verschiedene Lage und ungleiche Richtung haben.

Jede Gerade in derselben Ebene kann als erzeugende 35. angesehen werden. Jede dieser Geraden theilt daher die Ebene in zwei Theile und kann sich nach zwei entgegengesetzten *Seiten* sowohl schieben als drehen.

Jede Ebene repräsentirt also *zwei* entgegengesetzte *Seiten*, eine bestimmte Classe von *Richtungen* und eine bestimmte Classe von *Lagen*.

Anm. Wie zwei entgegengesetzte Bewegungen auf einer Geraden für das Auge ihren Gegensatz verlieren, wenn man die Gerade für jede von ihnen in einer anderen Richtung betrachtet, so auch zwei entgegengesetzte Bewegungen auf einer Ebene, wenn man dieselbe für jede der Bewegungen von einer anderen Seite (von *oben* oder von *unten*) betrachtet.

Die *Lage* einer Ebene wird durch einen beliebigen *Punkt* auf ihr, die *Richtung* einer Ebene durch *eine* beliebige Gerade in ihr, die *Seite* einer Ebene durch *zwei* beliebige Geraden in ihr bestimmt.

Eine Ebene hat also *dieselbe Lage mit einem Punkte*, 36. wenn derselbe auf ihr liegt, *verschiedene*, wenn er ausserhalb liegt. Sie hat *dieselbe Lage mit einer Geraden*, wenn dieselbe einen oder alle, *verschiedene Lage*, wenn sie keinen Punkt mit ihr gemeinsam hat. Sie hat *dieselbe*, resp. *gleiche Richtung* mit einer Geraden, wenn diese, resp. eine gleichgerichtete in ihr liegt; *verschiedene*, resp. *ungleiche Richtung* im anderen Falle.

Eine *Gerade* hat also mit einer *Ebene* entweder:

1) *dieselbe Lage* und *dieselbe Richtung* (wenn die Gerade in ihr liegt), oder:

2) *dieselbe Lage* und *ungleiche Richtung* (wenn die Gerade nur *einen* Punkt mit ihr gemeinsam hat), oder:

3) *verschiedene Lage* und *gleiche Richtung* (wenn eine gleichgerichtete Gerade in der Ebene liegt).

Hiermit sind alle Combinationen der oben genannten Lagen- und Richtungsverhältnisse erschöpft. Also kann *nicht* eine Gerade mit einer Ebene *verschiedene Lage* und *ungleiche Richtung* haben.

Eine Ebene, welche anfangen soll, sich zu bewegen, kann hiernach Lage, Richtung, oder Seite ändern.

2. Bestimmung durch mehrere feste Geraden.

37. Eine beliebige feste Ebene $\mathfrak{A}$ ist durch zwei beliebige ihrer Geraden, a , b , vollkommen bestimmt, sowohl wenn dieselben *gleiche Richtung*, als wenn sie *dieselbe Lage* haben. — Sie ist es noch, wenn man a mit b vertauscht. Durch diese Vertauschungsfähigkeit ist ihre zweifache Seite ausgedrückt.

Hiernach ist die Ableitung einer Ebene aus zwei Geraden *vergleichbar* der Ableitung einer Summe aus zwei Summanden; wir können daher sagen:

$$a + b = \mathfrak{A}.$$

$$b + a = \mathfrak{A}.$$

Die Summe zweier Geraden a und b ist die durch sie bestimmte Ebene $\mathfrak{A}$.

Sind drei Geraden auf der Ebene gegeben, a , b , c , so ist die Ebene schon durch zwei beliebige davon bestimmt. Also: wenn

$$a + (b + c) = b + (c + a) = c + (a + b) = \mathfrak{A},$$

so ist:

$$b + c = c + a = a + b = \mathfrak{A}.$$

Aus den letzten beiden Formeln folgt noch:

$$a + \mathfrak{A} = \mathfrak{A};$$

dies ist die *Bedingung*, unter welcher eine Gerade a in einer Ebene $\mathfrak{A}$ liegt.

Betrachtet man in der letzten Formel a und $\mathfrak{A}$ als *Größen*, so muss entweder $\mathfrak{A} = \infty$ oder $a = 0$ gesetzt werden, d. h.: die Ebene enthält eine unbestimmte Menge von Geraden; die Gerade hat, mit der Ebene verglichen, keine Grösse.

Anm. Die *Construction* einer Ebene aus zwei Geraden ist überflüssig, da alle Constructionen in einer a priori gegebenen Ebene ausgeführt werden.

Um die übrigen Bestimmungsweisen einer Ebene zu formuliren, setzen wir in der Formel:

$$a + b = \mathfrak{A}$$

$$a + A \text{ für } a$$

$$\text{und } b + B \text{ für } b,$$

wobei A auf a und B auf b liegt; so folgt:

$$a + b + (A + B) = \mathfrak{A},$$

oder, wenn

$$A + B = c \text{ ist:}$$

$$a + b + c = \mathfrak{A};$$

d. h.: wenn zwei Geraden a und b in derselben Ebene liegen, so liegt jede Gerade c , welche zwei beliebige Punkte A und B auf a und b verbindet, ebenfalls in dieser Ebene.

Wenn

$$a + b + c = \mathfrak{A}',$$

so ist auch:

$$b + c = \mathfrak{A},$$

oder:

$$b + A + B = \mathfrak{A},$$

oder, da

$$b + B = b \text{ ist:}$$

$$b + A = \mathfrak{A},$$

welches der Ausdruck für die zweite Bestimmung der Ebene ist.

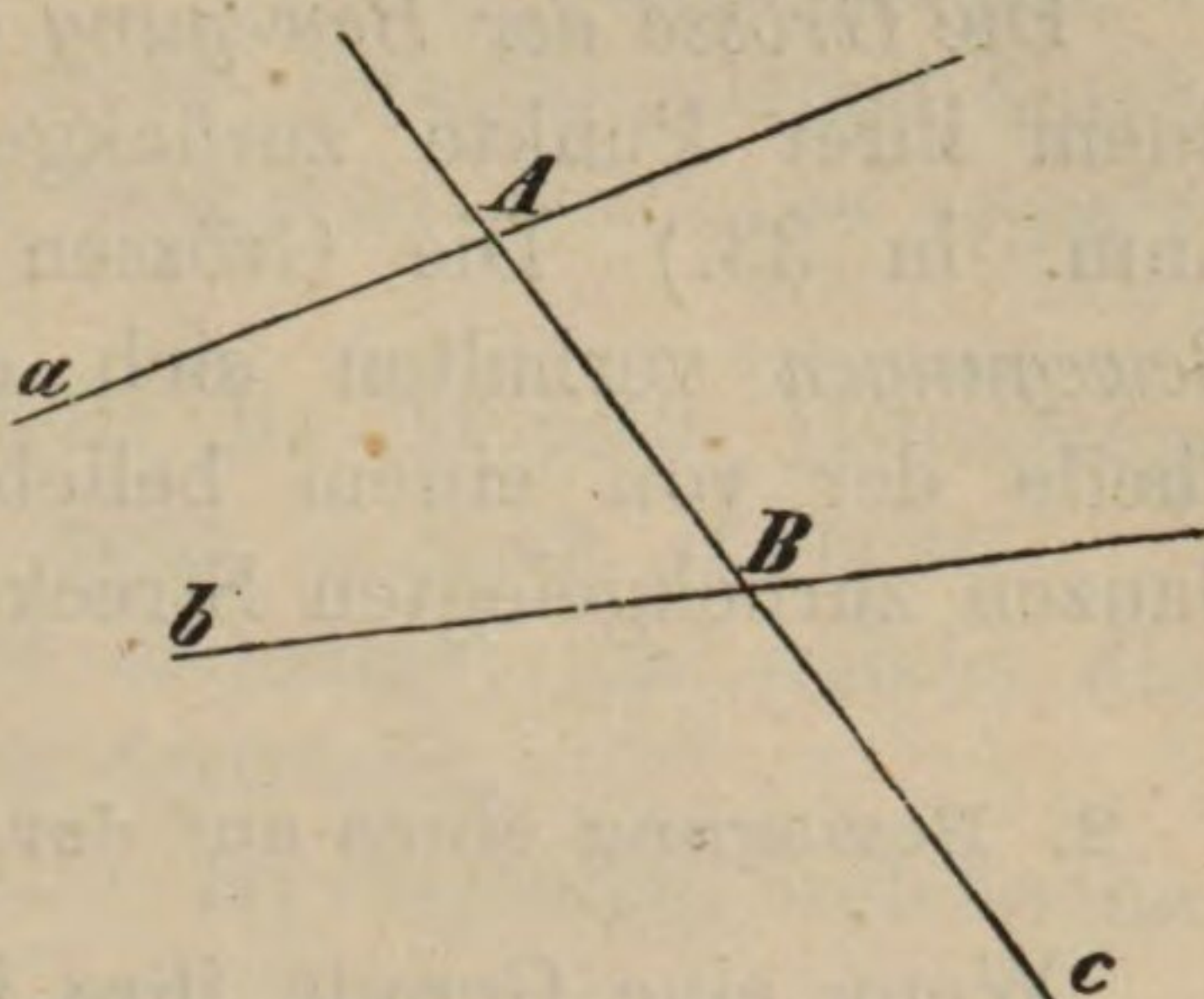
Setzt man noch:

$$b = B + D,$$

so erhält man:

$$A + B + D = \mathfrak{A}$$

als dritte Bestimmung der Ebene.



II. Grössen im Gebiete der Ebene.

a) Einzelne Grössen.

A. Abgeleitet aus einer beweglichen Geraden.

$\mathfrak{A}$. Grössen, durch *Schiebung* einer Geraden erzeugt.

1. Bewegung einer Geraden.

Ein von zwei Geraden mit verschiedener Lage eingeschlossener Theil der Ebene heisst *Ebenenstreifen*. Seine Grösse ist unbestimmt; denn da die Gerade nicht begrenzt ist, so ist auch ein durch ihre Bewegung erzeugtes Gebilde nicht vollkommen begrenzt.

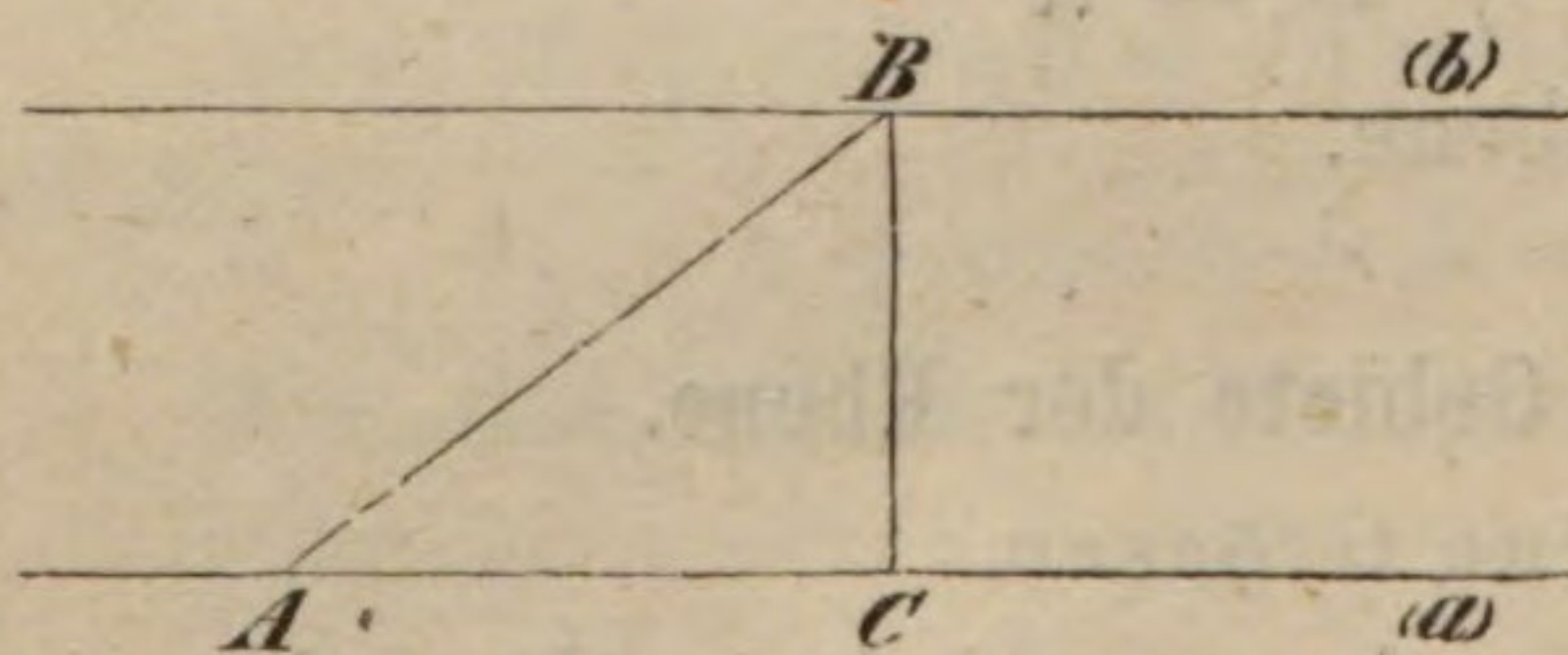
Anm. Zwei Geraden mit verschiedener Lage aber gleicher Richtung heissen *parallel*.

40. Die *Grösse der Bewegung* der Geraden wird durch die von einem ihrer Punkte zurückgelegte *Strecke* bestimmt. (Vgl. Anm. in 33.) Die Grössen *mehrerer aufeinanderfolgender Bewegungen* verhalten sich daher wie die entsprechenden Theile der von einem beliebigen Punkte der Geraden im Ganzen zurückgelegten Strecke.

2. Bewegung eines auf der Geraden liegenden Punktes.

41. Wenn eine Gerade ihre Lage ändert, so ist ihre Bewegung entweder eine *einartige* oder eine *doppelte*. Im letzteren Falle bewegt sich die Gerade noch in ihrer eigenen Richtung um eine Strecke vorwärts; im ersteren Falle thut sie dies nicht. — Im letzteren Falle aber lässt sich die doppelte Bewegung in zwei nach einander folgende einartige Bewegungen zerlegen, nämlich in ein einfaches Fortrücken in der Richtung der Geraden und in eine einfache Lagenänderung. Da die erste dieser beiden Bewegungen die Gerade ungeändert lässt, so ist sie auch auf deren Endstellung ohne allen Einfluss.

Demgemäss kann auch ein fester Punkt *A* der ersten Geraden durch geradlinige Bewegung jeden beliebigen Punkt *B* der zweiten Geraden erreichen. Diese verschiedenen Bewegungen werden durch die verschiedenen Richtungen be-



stimmt, welche der Punkt *A* einschlagen kann. *)

Jede dieser Bewegungen des Punktes *A*, z. B. von *A* nach *B*, lässt sich in zwei Bewegungen von be-

stimmter, unveränderlicher Richtung zerlegen, nämlich 1. in eine Bewegung von *A* nach *C*, welche diejenige Strecke erzeugt, um welche die Gerade in ihrer eigenen Richtung fort-

*) Da für jede dieser Richtungen der am Schluss von 40. ausgesprochene Satz gilt, so folgt ohne weiteres der andere Satz, dass, wenn zwei sich schneidende Geraden von einer Anzahl Parallelen geschnitten werden, der Quotient zweier zwischen denselben Parallelen liegenden Strecken überall numerisch denselben Werth hat.

rückt, 2. in eine Bewegung von C nach B , welche diejenige Strecke erzeugt, um welche die Gerade ihre Lage ändert.

Da nun die Lagenänderung einer Geraden allemal durch diejenige eines Punktes auf ihr bestimmt wird, so ergibt sich Folgendes:

1) Die Strecke $(A - B)$ stellt die doppelte Bewegung dar, welche die Gerade erleidet, wenn A nach B rückt.

2) Die Strecke $(A - C)$ ist diejenige, um welche die Gerade in ihrer eigenen Richtung fortrückt.

3) Und es ist die Strecke $(C - B)$ diejenige, welche die *einartige* Bewegung der Geraden ausdrückt.

Die Strecke $(C - B)$ heisst die *Entfernung* der beiden Geraden.

Bezeichnen wir den Lagenunterschied der beiden Geraden (a) und (b) mit $(a) - (b)$, so ist

$$(a) - (b) = (C - B) = a$$

als Ausdruck des Gesetzes 3). — Hieraus folgt:

$$(a) = (b) + a \quad ; \quad (b) = (a) - a;$$

d. h.: durch eine Parallele und die Entfernung von ihr ist die andere bestimmt.

Die Strecke $(C - B)$ bezeichnet auch die *Entfernung* des Punktes C von der Geraden (b) , und des Punktes B von der Geraden (a) ; denn da

$$(a) + (b) = A = (a) + B,$$

so ist auch:

$$(a) - B = (a) - (b),$$

d. h.: eine Parallele (b) ist bestimmt, wenn ein Punkt (B) auf ihr, und die andere Parallele (a) gegeben sind.

Ferner ist

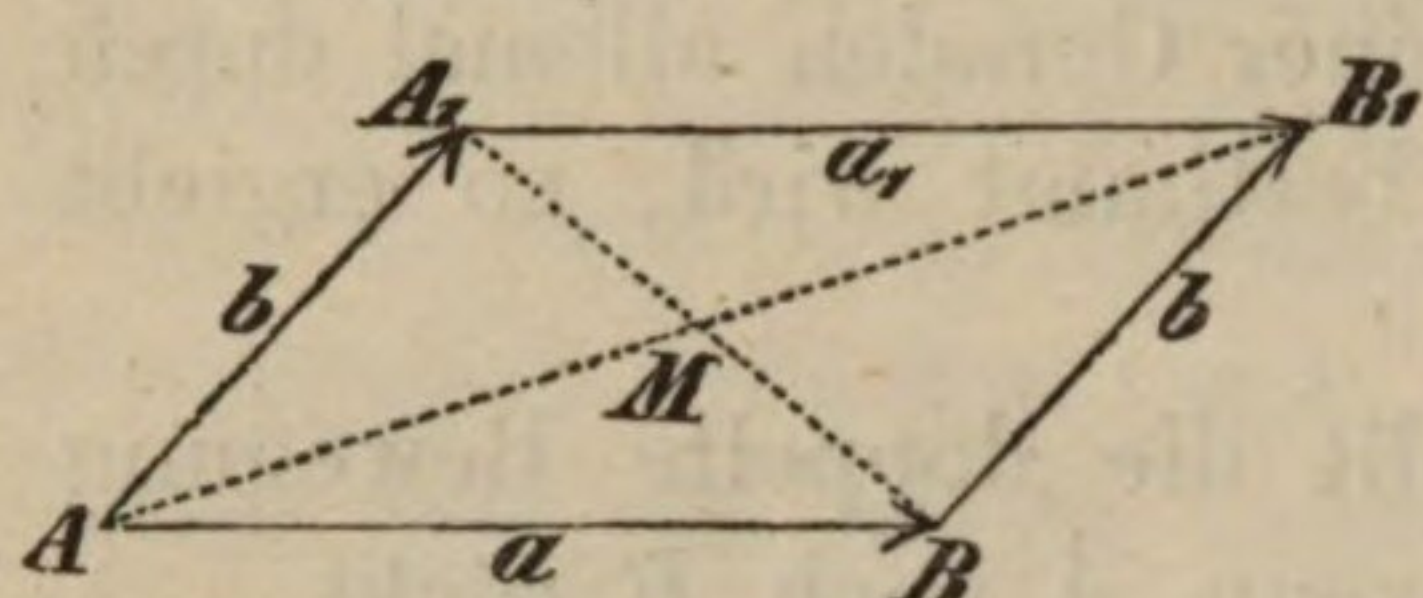
$$(a) - B = C - B;$$

d. h.: es giebt auf einer Geraden (a) nur einen Punkt C , dessen Entfernung von einem äusseren Punkte B gleich der Entfernung der Geraden von diesem Punkte ist.

3. Bewegung einer auf der Geraden liegenden Strecke.

Ändert eine Strecke a ihre Lage in der Ebene so, dass^{42.} sie in a_1 übergeht, so erleidet der Lagenunterschied ihrer

Endpunkte keine Veränderung. Ist also $(A - B)$ ihre Anfangs- und $A_1 - B_1$ ihre Endstellung, so ist:



$$(A - B) = (A_1 - B_1).$$

Hieraus folgt:

$$(A - A_1) = (B - B_1);$$

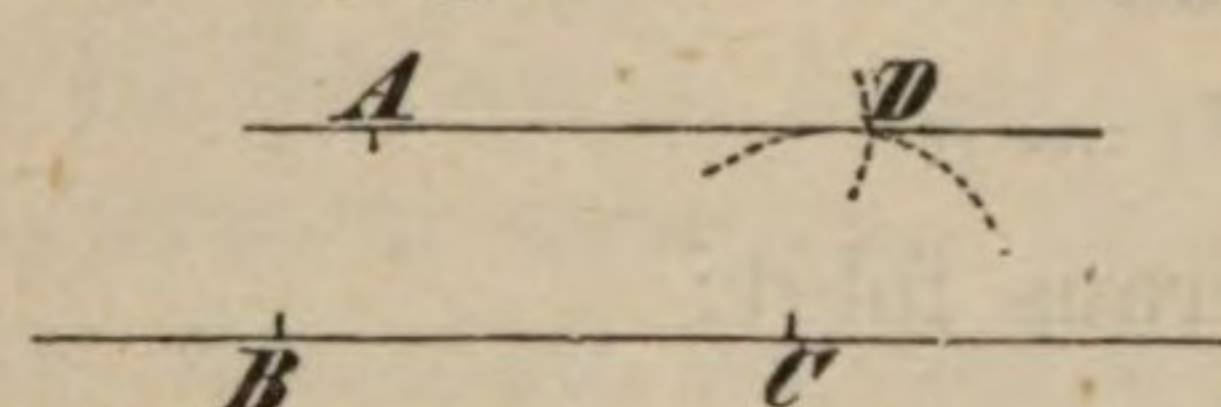
und umgekehrt.

d. h.: Anfangs- und Endpunkt der bewegten Strecke legen gleiche und gleichgerichtete Strecken zurück.

Wenn zwei Punkte in einer Ebene gleiche und gleichgerichtete Strecken beschreiben, so bleibt ihre Entfernung ungeändert.

Anm. Die Construction einer Strecke $(A_1 - B_1)$, die mit einer gegebenen $(A - B)$ gleich und gleichgerichtet ist, geschieht mit Hilfe des Cirkels.

Aufgabe: Durch einen ausserhalb einer Geraden gegebenen



Punkt A die Parallele zu ziehen. — Man wähle auf der Geraden B und C beliebig, und beschreibe aus C mit $(A - B)$, aus A mit $(B - C)$ Kreislinien. Deren dies-

seitigen Durchschnittspunkt D verbinde man mit A , dann ist $(A - D) = (B - C)$.

43. Sei $(A - B) = a$; $(A - A_1) = b$;
dann ist:

$$A_1 - B = a - b \quad ; \quad A - B_1 = a + b,$$

d. h.: die Summe zweier mit Anfangs- und Endpunkt aneinander gelegten Strecken ist die Strecke zwischen ihren anderen Endpunkten; die Differenz zweier mit ihren Anfangs- oder Endpunkten zusammengelegten Strecken ist die Strecke zwischen ihren End- oder Anfangspunkten.*)

Anm. Die Zulässigkeit einer Addition von zwei Strecken, die nicht in derselben Geraden liegen, sondern nur in derselben Ebene, folgt daraus, dass, wie oben (38.) gezeigt wurde, die Verbindungsstrecke zweier Punkte von sich schneidenden Geraden in der Ebene dieser Geraden liegt.

Setzen wir in den letzten Formeln für a und b ihre Werthe, so lauten sie:

$$(A_1 - B) = (A - B) - (A - A_1);$$

$$(A - B_1) = (A - B) + (B - B_1),$$

oder:

$$(A - B) + (B - B_1) + (B_1 - A) = 0.$$

*) Vgl. G. A. II. 220.

Analog wird man die Summe beliebig vieler Strecken bilden, und das Gesetz aufstellen: *Die Summe von beliebig vielen hintereinander gelegten Strecken ist Null, wenn der Endpunkt der letzten mit dem Anfangspunkte der ersten zusammenfällt.*

Die Formeln in 42. kann man übereinstimmend schreiben: 44.

$A + B_1 = B + A_1$ Wenn zwei Strecken in der Ebene
oder: gleich und gleich gerichtet sind, so
 $\frac{A + B_1}{2} = \frac{B + A_1}{2} = M.$ haben die Strecken zwischen dem
Anfangspunkte der einen und dem
Endpunkte der anderen denselben
Halbirungspunkt.

4. Bewegung eines auf der Geraden liegenden Linientheils. — Das Parallelogramm.

a) Einmalige Bewegung des Linientheils. — Ein Parallelogramm.

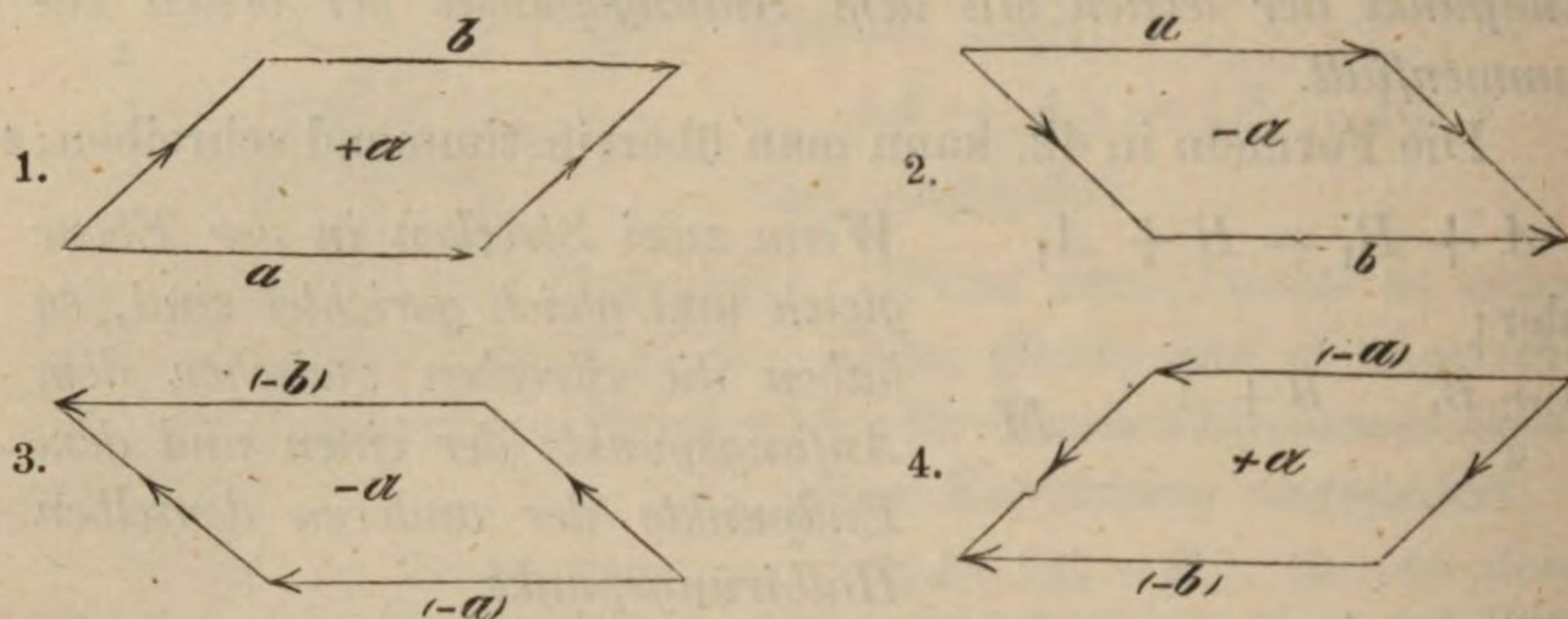
Durch begrenzte Bewegung eines Linientheils entsteht 45.
ein Theil einer Ebene, der *Parallelogramm* genannt wird.
Dasselbe ist vollkommen begrenzt, also eine Grösse, weil der
dasselbe erzeugende Linientheil selbst vollkommen begrenzt
ist. — Als Grenzen am Parallelogramm heissen die beiden
Linientheile *Seitenlinien*, ebenso die von ihren Endpunkten
erzeugten Linientheile. Die Endpunkte selbst heissen *Eck-*
punkte.

Ein Parallelogramm $\mathfrak{A}$ ist durch seine beiden „Gegen-
seiten“ a, b vollkommen bestimmt. Als vollkommen begrenz-
tes Gebilde ist es namentlich auch seiner Grösse nach be-
stimmt. — Da aber sowohl die *Richtung* der erzeugenden
Gegenseiten, als die *Seite* der Bewegung, durch die es ent-
standen (die Richtung der beiden anderen Gegenseiten) zwei-
deutig ist, so muss diese Zweideutigkeit durch die Bezeich-
nung beseitigt werden. Nun erhält es durch Vertauschung
von a und b die entgegengesetzte Seite (1. 2.)

Durch Vertauschung von a mit $(-a)$, von b mit $(-b)$ er-
hält das Parallelogramm ebenfalls entgegengesetzte Seite (1. 3.).

Durch successive Ausführung beider Operationen bleibt
das Parallelogramm ungeändert (1. 2. 4. oder 1. 3. 4.).

Also *entspricht* die Ableitung eines *Parallelogramms* aus *zwei Linientheilen* der Ableitung einer Differenz aus Minuend und Subtrahend; wir können daher sagen:



1. $a - b = \mathfrak{A}$

2. $b - a = -\mathfrak{A}$

3. $(-a) - (-b) = -\mathfrak{A}$

4. $(-b) - (-a) = \mathfrak{A}$.

Die Differenz (Lagenunterschied) von zwei gleichen und gleich gerichteten Linientheilen a und b ist das durch dieselben bestimmte Parallelogramm $\mathfrak{A}$.

Die von den Endpunkten der Seite a beschriebenen Linientheile können ebenfalls als Anfangs- und Endstellung eines Linientheils betrachtet werden, wobei dann a und b die von dessen Endpunkten beschriebenen Linientheile sind.

Anm. Die beiden Verbindungsstrecken zwischen je zwei gegenüberliegenden Eckpunkten des Parallelogramms heissen *Diagonalen*. — Ferner sei im Voraus bemerkt, dass der von zwei Seitenlinien und einer Diagonale begrenzte Theil des Parallelogramms *Dreieck* heisst, überhaupt jeder Theil der Ebene, der von n Strecken mit der Summe 0 begrenzt ist: n -Eck (*Vieleck*).

Ist die Lagenänderung der Geraden, auf welcher der Linientheil liegt, *einartig*, so heisst das Parallelogramm *Rechteck*. — Sind alle vier Seitenlinien gleich gross, so heisst es *Raute*, treffen beide Bedingungen zusammen: *Quadrat*.

b) Mehrmalige Bewegung des Linientheils. — Mehrere Parallelogramme.*)

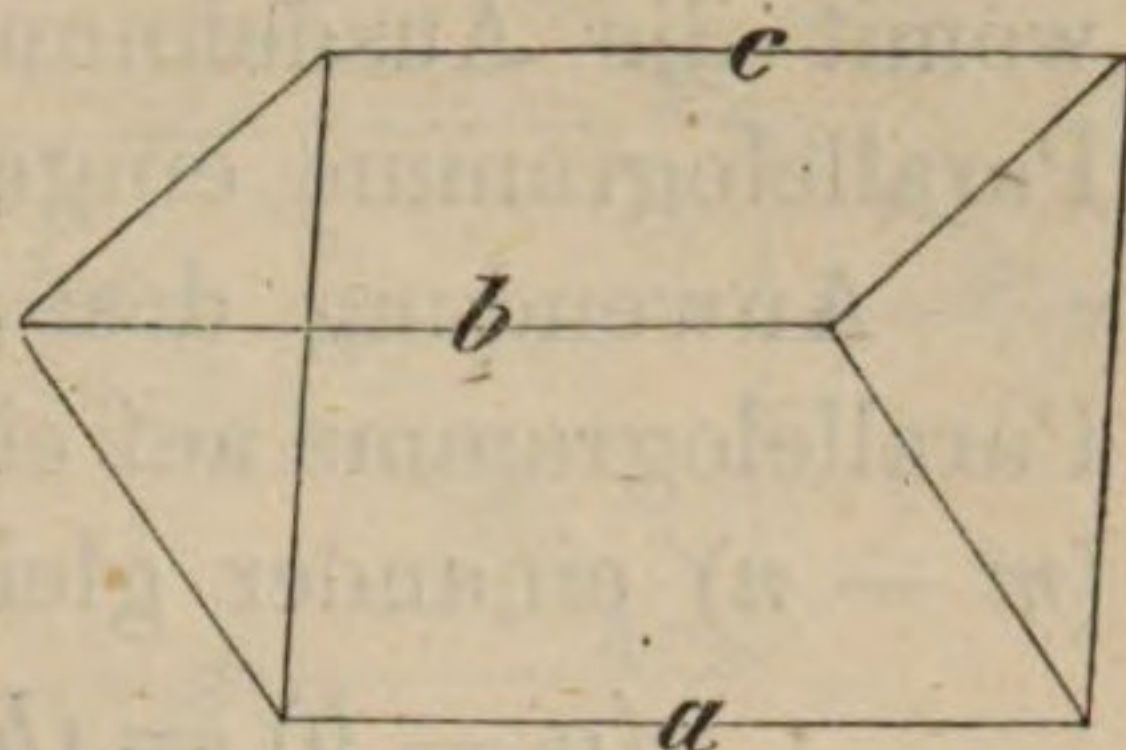
46. Wenn ein Linientheil a durch Lagenänderung erst das Parallelogramm $\mathfrak{A} (= a - b)$, dann $\mathfrak{B} (= b - c)$ erzeugt,

*) Vgl. G. A. I. § 56.

so kann er statt dessen das Parallelogramm $\mathfrak{C}$ ($= a - c$) beschreiben, indem er direct von a nach c geht. Da nun

$$(a - b) + (b - c) = (a - c),$$

so ist das letztere Parallelogramm die Summe der beiden ersteren, d. h.: die Summe zweier mit End- und Anfangsseite aneinander gelegten Parallelogramme (falls nämlich diese Seiten



gleich sind) ist das Parallelogramm zwischen ihren anderen Endseiten.

Durch Anwendung des Begriffs der Subtraction findet man 47.

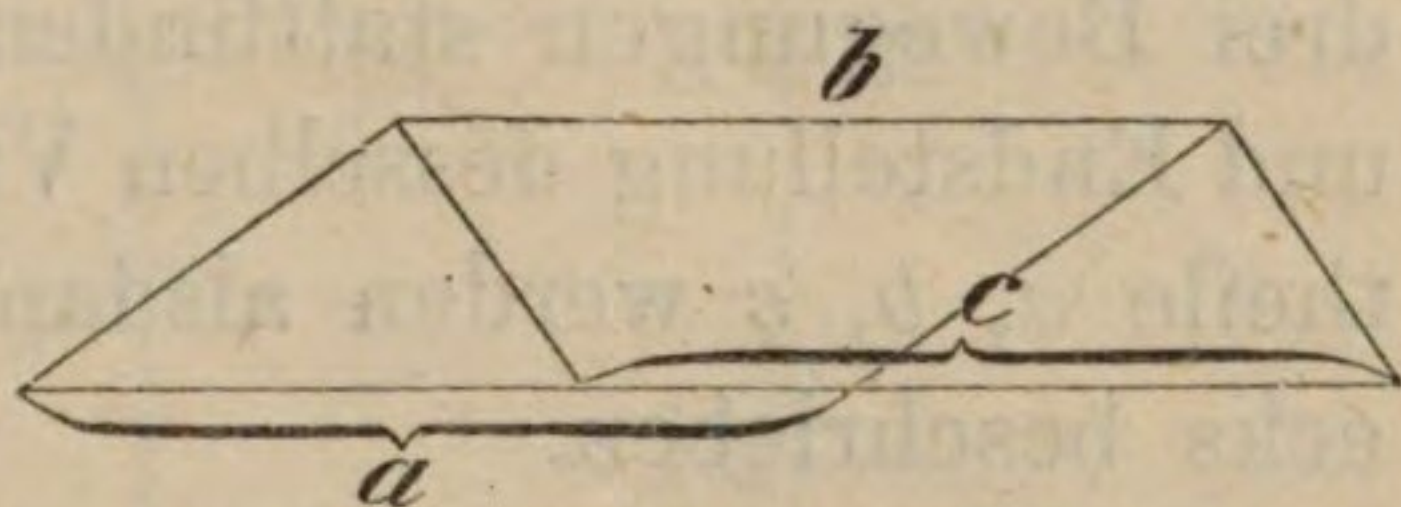
$$(a - b) = (a - c) - (b - c),$$

d. h.: die Differenz zweier mit End- und Anfangsseite aufeinander gelegten Parallelogramme (falls nämlich diese Seiten gleich sind) ist das Parallelogramm zwischen ihren anderen Endseiten.

Liegen die Seiten a und b auf derselben Geraden, so ist 48. $a = b$, und $(a - c) - (a - c) = 0 = (a - a)$.

Liegen die Seiten a und c auf derselben Geraden, so ist $a = c$, also:

$$\begin{aligned} (a - b) &= (a - a) - (b - a) \\ &= - (b - a) = - (b - c), \end{aligned}$$



49.

d. h.: Kehrt ein Linientheil, der ein Parallelogramm beschrieben hat, auf einem anderen Wege in die erste Gerade zurück, so sind die beiden entstandenen Parallelogramme entgegengesetzt, aber gleich. (Parallelogramme zwischen denselben Parallelen sind gleich.)

Parallelogramme mit entgegengesetzter Seite werden also behandelt wie Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen.

Aus 49. folgt noch:

50.

$$(a - b) + (b - a) = 0,$$

und die Formel 46. lässt sich in folgenden drei Formen schreiben:

$$(a - b) = (a - c) + (c - b);$$

$$(b - c) = (b - a) + (a - c);$$

$$(a - c) = (b - c) + (a - b);$$

alle drei aber geben:

$$(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0,$$

womit die Ausdehnung unserer Formel auf mehr als zwei Parallelogramme eingeleitet wird.

51. Anwendung des Begriffs der *Multiplication*. — Seien ν Parallelogramme auf einer Ebene: $(a - b)$, $(b - c)$, $(c - d) \dots (m - n)$ einander gleich, so kann, wenn

$$(a - b) = (b - c) = \dots = (m - n) = \mathfrak{A}$$

ist, die Summe derselben:

$$(a - n) = \nu \cdot \mathfrak{A}$$

gesetzt werden. Sei

$$(a - n) = \sigma,$$

so ist:

$$\sigma = \nu \cdot \mathfrak{A},$$

oder:

$$\sigma : \mathfrak{A} = \nu,$$

d. h.: *der Quotient zweier Parallelogramme auf derselben Ebene ist eine Zahl.*

52. Die von den Endpunkten der Seite a beschriebenen Linientheile bilden zwei congruente *Dreiecke*, oder, wenn mehr als drei Bewegungen stattfinden, *Vielecke*, die man als Anfangs- und Endstellung desselben Vielecks ansehen kann. Die Linientheile a , b , c werden alsdann von den Eckpunkten des Vielecks beschrieben.

53. *Erweiterung.* 1) Es seien die Parallelogramme, die von den Seiten a , b , c eines Dreiecks bei vier successiven Bewegungen beschrieben werden, mit $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4 \mathfrak{C}_4$ bezeichnet; so hat man allgemein, wenn das Dreieck in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist:

$$1) \begin{cases} \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4 = 0. \\ \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B}_4 = 0. \\ \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_4 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 = 0. \\ \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 = 0. \\ \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{C}_3 = 0. \\ \mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4 + \mathfrak{C}_4 = 0. \end{cases}$$

a) Setzt man nun $\mathfrak{C}_2 = 0$, $\mathfrak{B}_3 = 0$ (was der nebenstehenden Figur entspricht), so erhält man:

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 = 0;$$

$$\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_4 = 0; \quad \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 = 0;$$

$$\text{folglich:} \quad (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) + (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2) = -\mathfrak{C}_1;$$

$$\text{oder, da } (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2) = -\mathfrak{B}_4 \text{ ist:}$$

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{B}_4 - \mathfrak{C}_1.$$

Sucht man in der Figur
das Parallelogramm

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\mathfrak{B}_4 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{C}_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

so findet sich, dass die letzte

Formel den *Satz des Pappus* ausdrückt.

b) Nimmt man nur drei Bewegungen an, sodass

54.

und setzt:

$$\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{B}_4 = \mathfrak{C}_4 = 0,$$

so folgt:

$$\mathfrak{A}_2 = 0, \quad \mathfrak{B}_1 = 0,$$

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_1 = 0;$$

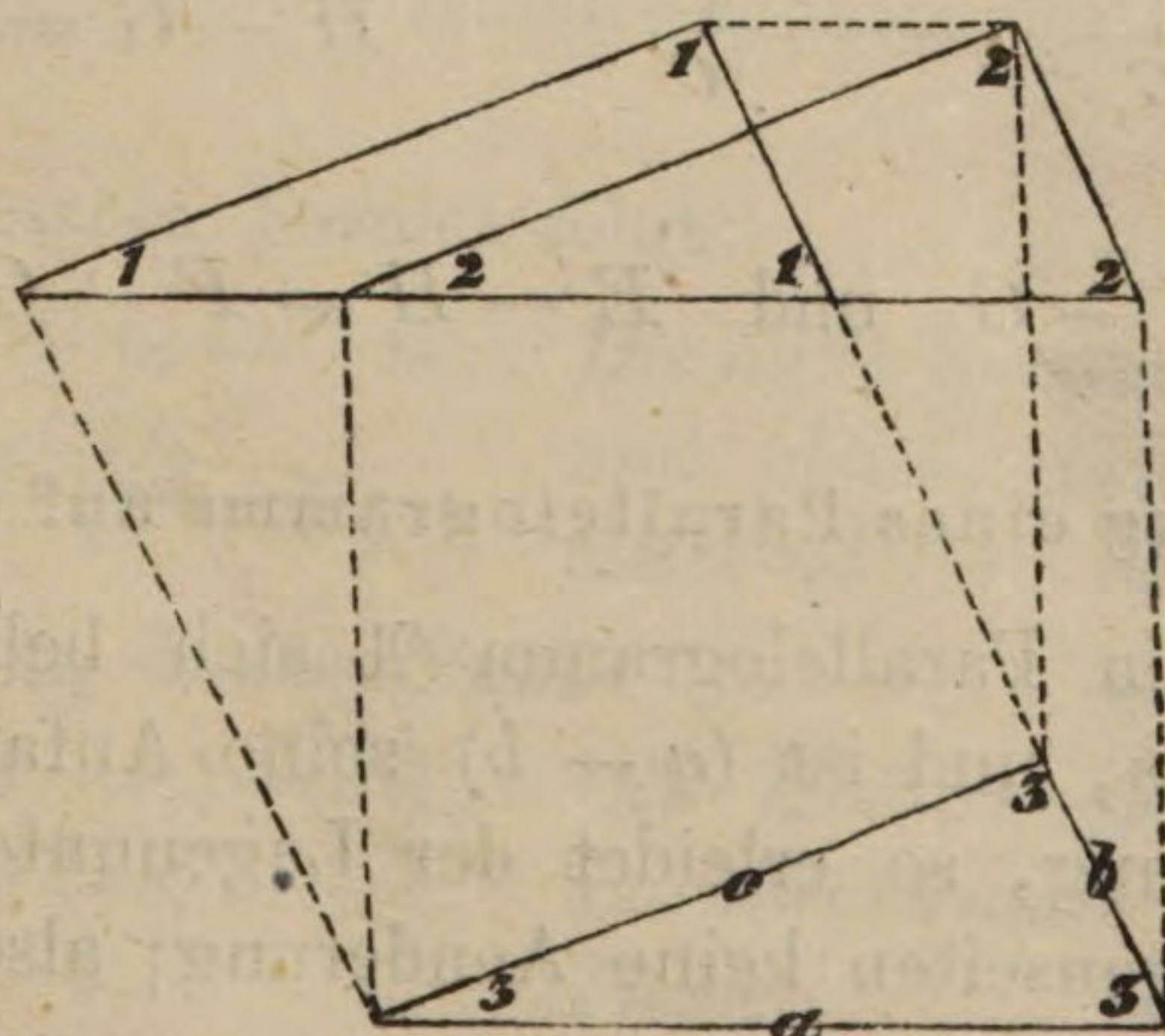
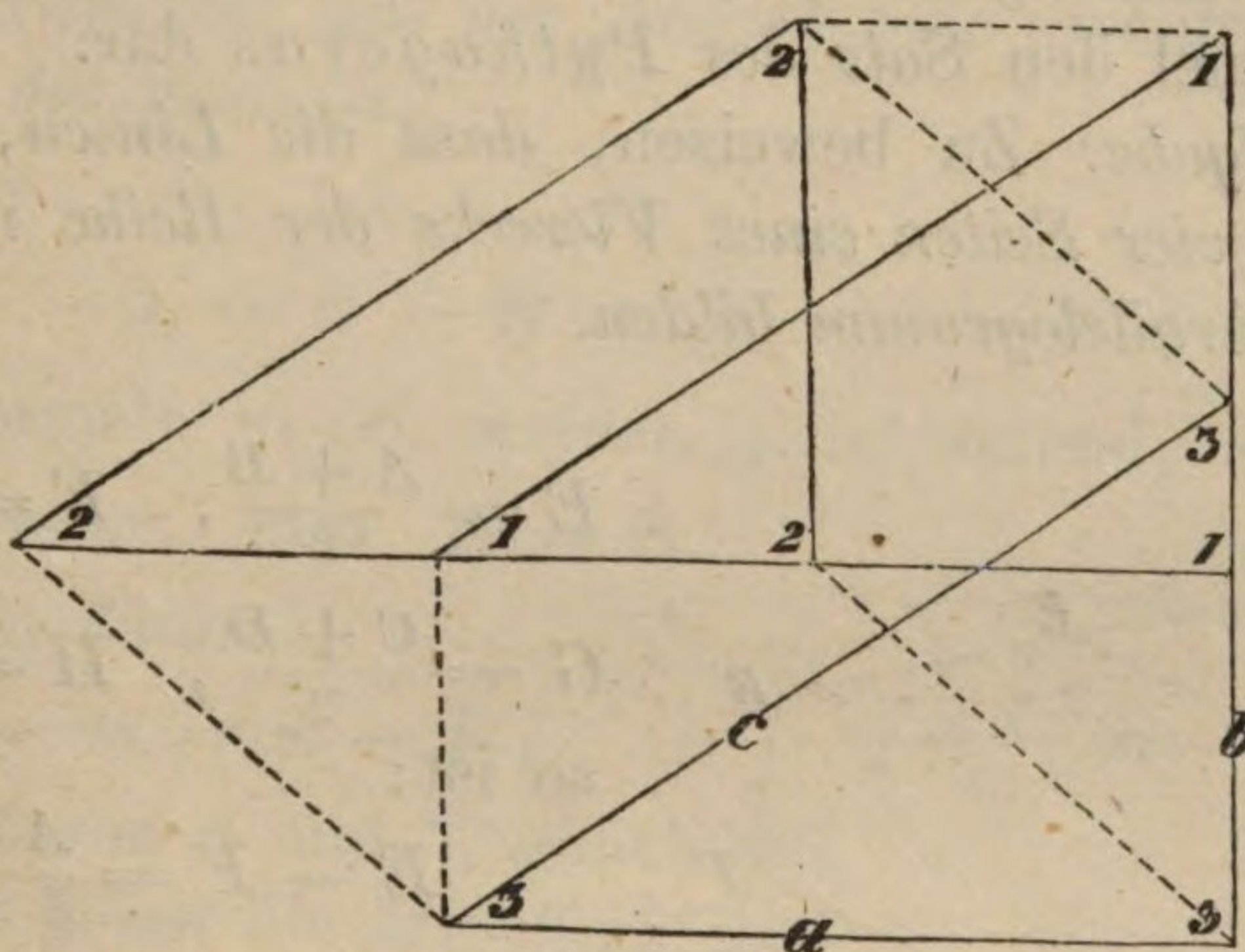
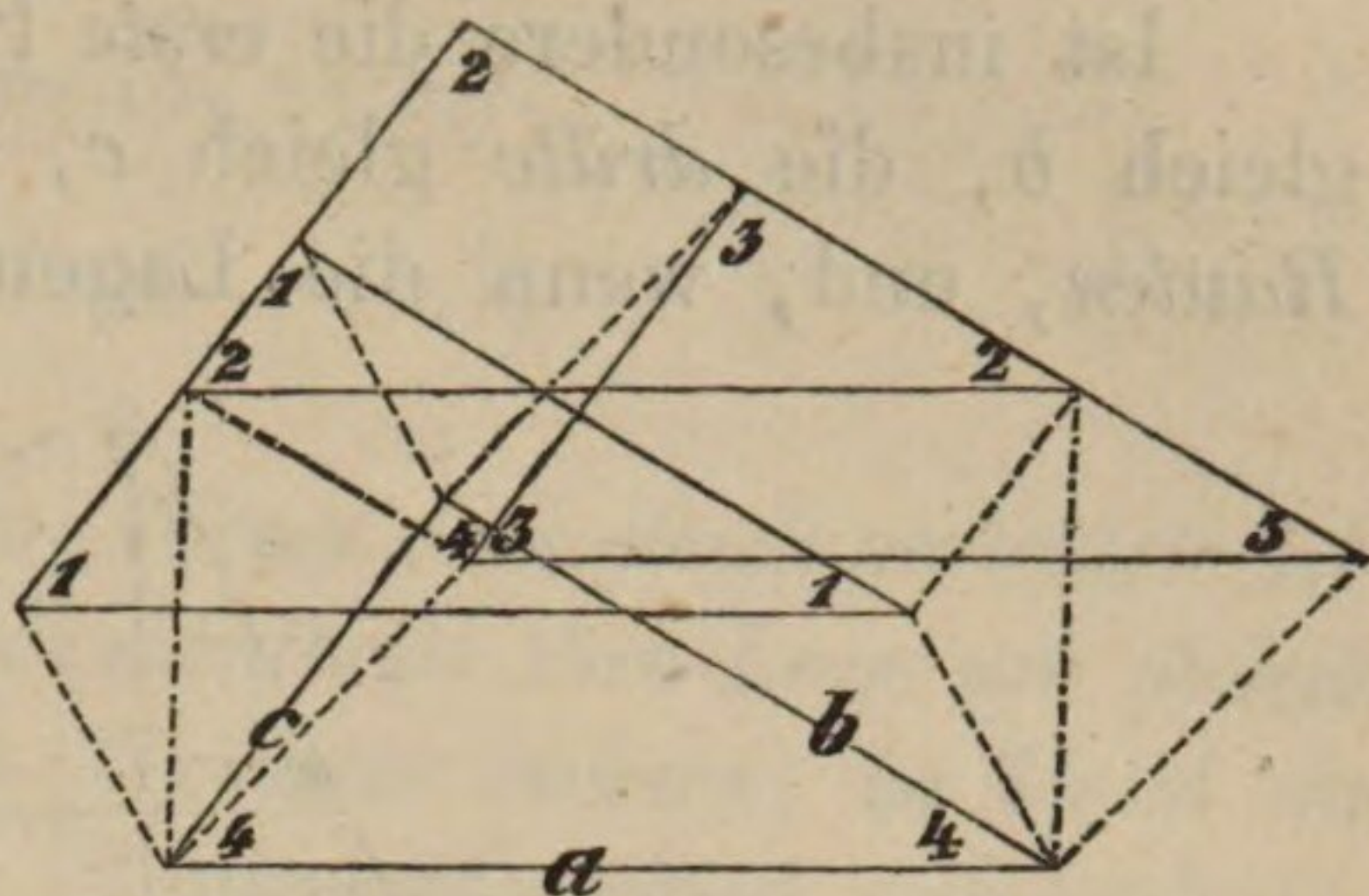
folglich:

$$\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 = 0; \quad \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 = 0;$$

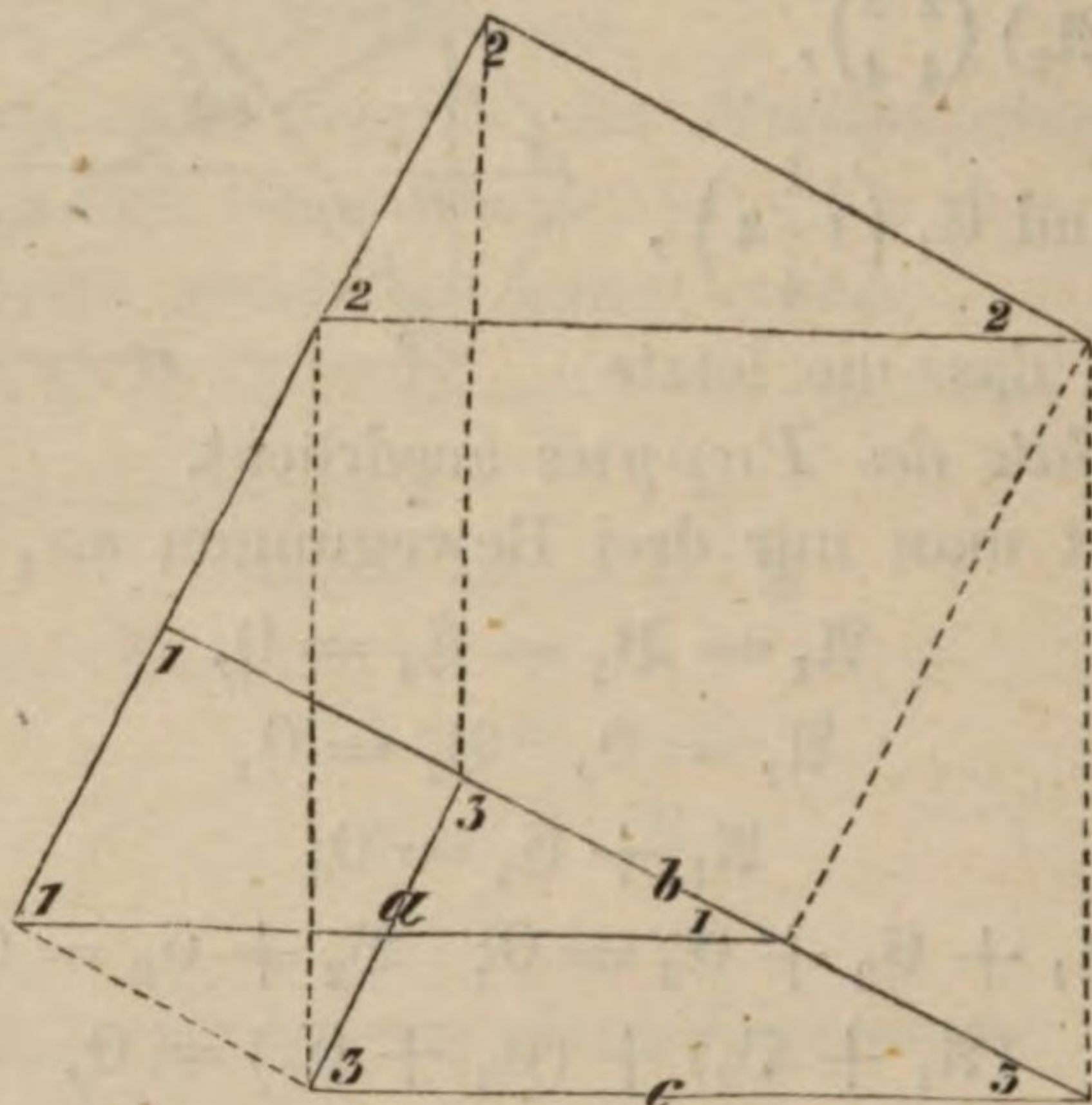
$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_2) + (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) = 0,$$

oder, da $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 = -\mathfrak{C}_3$ ist:

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_3.$$



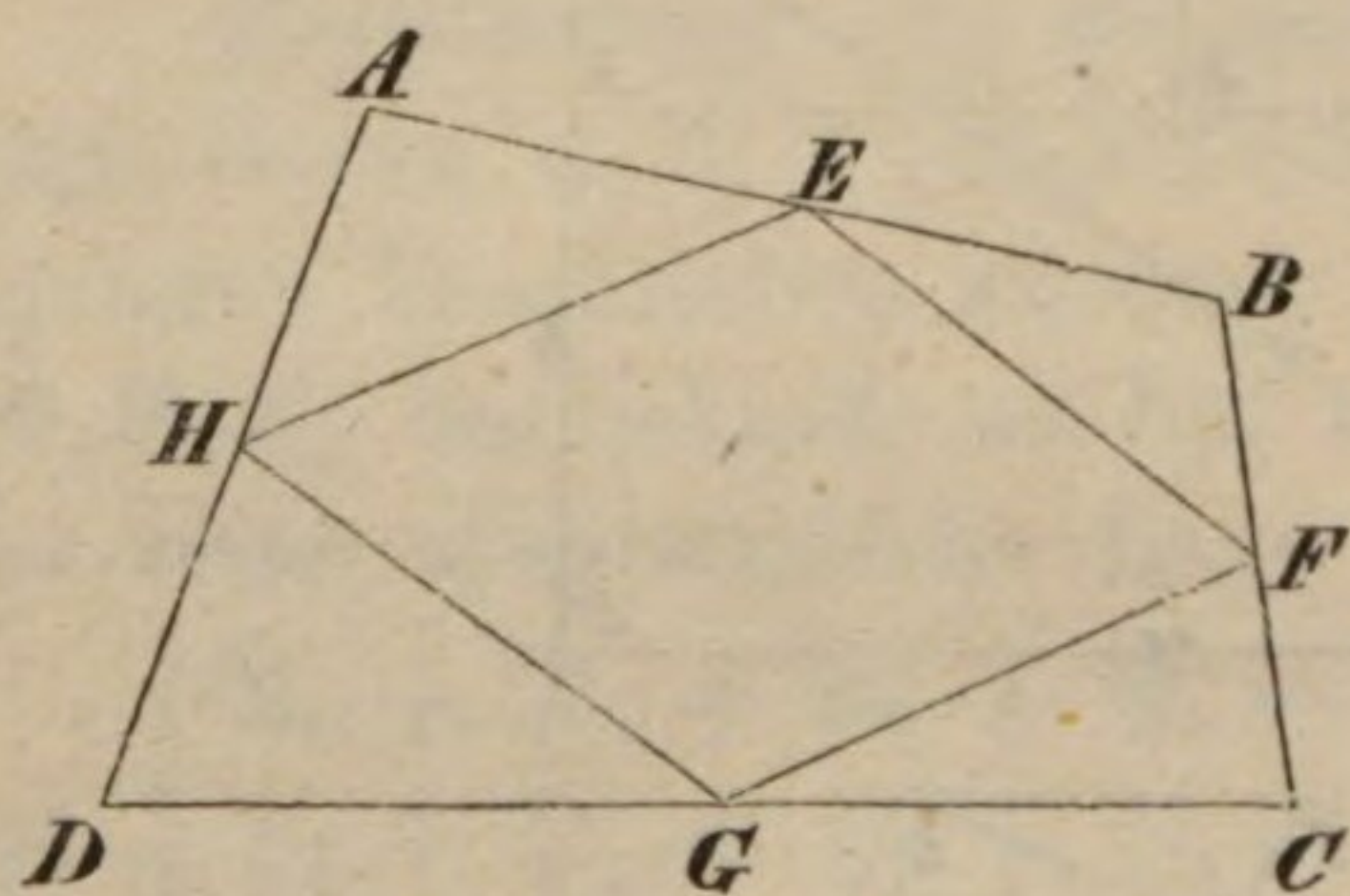
Ist insbesondere die *erste* Bewegung gleich a , die *zweite* gleich b , die *dritte* gleich c , so sind die Parallelogramme *Rauten*, und, wenn die Lagenänderungen von a, b, c der



Reihe nach *einartig* sind, Quadrate. Im letzteren Falle stellt unsere Formel den *Satz des Pythagoras* dar.

55. 2) *Aufgabe*: Zu beweisen, dass die Linien, welche die *Mitten* der vier Seiten eines Vierecks der Reihe nach *verbinden*, ein *Parallelogramm* bilden.

Wenn



$$E = \frac{A+B}{2}, \quad F = \frac{B+C}{2};$$

$$G = \frac{C+D}{2}, \quad H = \frac{D+A}{2};$$

so ist:

$$E - F = \frac{A-C}{2};$$

$$H - G = \frac{A-C}{2};$$

folglich:

$$E - F = H - G \quad \text{und} \quad E - H = F - G, \quad \text{w. z. b. w.}$$

c) Bewegung eines Parallelogramms auf einer Ebene.

56. Bewegt ein Parallelogramm $\mathfrak{A}$ sich beliebig auf einer Ebene vorwärts, und ist $(a - b)$ seine Anfangs-, $(a_1 - b_1)$ seine Endstellung, so erleidet der Lagenunterschied der erzeugenden Gegenseiten keine Aenderung; also ist

$$(a - b) = (a_1 - b_1).$$

Hieraus folgt:

$$(a - a_1) = (b - b_1);$$

und umgekehrt;

d. h.: *Anfangs- und Endseite des bewegten Parallelogramms beschreiben gleiche Parallelogramme.*

Wenn zwei gleich gerichtete Linientheile ihre Lage um gleiche Grössen ändern, so bleibt ihr Lagenunterschied ungeändert.

$$\text{Sei } (a - b) = \mathfrak{A}; \quad (A - A_1) = \mathfrak{B}.$$

57.

Dann ist

$$a = b + \mathfrak{A} = a_1 + \mathfrak{B};$$

d. h.: *die Summe aus einem Parallelogramm und seiner Endseite ist seine Anfangsseite.*

Ferner:

$$b = a - \mathfrak{A}; \quad a_1 = a - \mathfrak{B};$$

d. h.: *die Differenz aus der Anfangsseite und dem Parallelogramm ist die Endseite.*

Ferner:

$$b - a_1 = \mathfrak{B} - \mathfrak{A}; \quad a - b_1 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Die Formeln in 56. werden gleichlautend, wenn

58.

$$a_1 = b = m; \quad \text{also } \mathfrak{A} = \mathfrak{B}.$$

Beide lauten dann:

$$a - m = m - b_1,$$

d. h.: *m ist von a und b₁ gleichweit entfernt; m heisst die Mittellinie zwischen a und b₁, oder die Halbirungslinie des Parallelogramms (a - b₁).*

Aus der letzten Formel folgt:

$$a + b_1 = m + m = 2m,$$

$$\text{oder: } m = \frac{a + b_1}{2}.$$

Die halbe Summe zweier gleichen und gleich gerichteten Linientheile ist ihre Mittellinie.

Ferner ist in diesem Falle:

$$(b - a_1) = 0, \quad (a - b_1) = 2\mathfrak{A},$$

$$\text{oder: } \mathfrak{A} = \frac{a - b_1}{2}.$$

Die Halbirungslinie theilt das Parallelogramm in zwei gleiche Theile.

59. Die Formeln in 56. kann man übereinstimmend schreiben:

$$a + b_1 = b + a_1;$$

oder:

$$\frac{a + b_1}{2} = \frac{b + a_1}{2} = m.$$

Wenn zwei Parallelogramme gleich, und ihre Anfangsseiten gleich und gleich gerichtet sind, so haben die Parallelogramme zwischen der Anfangsseite des einen und der Endseite des anderen dieselbe Halbirungslinie.

60. Die Formel $a - m = m - b_1$ lässt sich auch schreiben:

$$(m - b_1) + (m - a) = 0.$$

Nunmehr lässt sich der Begriff der Mittellinie dahin erweitern, dass man sagt: Für v gleiche und gleich gerichtete Linientheile $a, b, c \dots n$ auf einer Ebene ist derjenige Linientheil die Mittellinie, welcher der Bedingung genügt:

$$(m - a) + (m - b) + \dots + (m - n) = 0,$$

oder:

$$m = \frac{a + b + \dots + n}{v}.$$

61. Parallelogramme, die *nicht an* einander liegen, werden erst nach 56. aneinander gelegt, und dann nach 46. addirt.

62. Sei die Summe von n Parallelogrammen dieser Art gleich Null, so können wir (analog wie im Gebiete der Geraden) für jeden, der Erzeugungsseite gleichen und gleich gerichteten Linientheil r den Satz ableiten, dass die Parallelogramme, welche aus r und den Anfangsseiten gebildet sind, dieselbe Summe geben, wie die aus r und den Endseiten abgeleiteten.

63. Fallen insbesondere die Endseiten alle in eine Gerade und sind durch m bezeichnet, so erhält man den Satz: Wenn in einer Ebene v gleiche und gleich gerichtete Linientheile gegeben sind, so ist für jeden anderen gleich langen und gleich gerichteten Linientheil der Ebene die Summe der Parallelogramme mit diesen Linientheilen gleich dem v fachen Parallelogramme mit ihrer Mittellinie.

Anm. Die Aufgabe: die Mittellinie zwischen einer Anzahl gleich langer und gleich gerichteter Linientheile zu suchen, ist hierdurch zurückgeführt auf die Aufgabe: ein gegebenes Parallelogramm in n gleiche Theile zu theilen.

B. Grössen, durch *Drehung* einer Geraden erzeugt.

α. Drehung um einen *auf* der Geraden liegenden Punkt.

1. Bewegung einer Geraden. — Der Winkel.

a) Einmalige Drehung der Geraden. — Ein Winkel.

Ein von zwei Geraden mit ungleicher Richtung eingeschlossener Theil der Ebene heisst *Ebenenwinkel*. Seine Grösse ist ebenso unbestimmt wie die eines Ebenenstreifens.

Anm. Zwei Geraden mit derselben Lage, aber ungleicher Richtung heissen „*sich schneidend*“. — Ihr Drehungspunkt heisst *Durchschnittspunkt* der Geraden.

Um die Grösse der Bewegung der Geraden bestimmen zu können, ist ein neuer Begriff erforderlich, da diese Bewegung nicht mehr eine Schiebung, sondern eine Drehung ist. Wir bezeichnen den Richtungsunterschied der beiden Geraden mit dem Namen „*Winkel*“. — Wie die *Lagenunterschiede* durch die *Strecke*, so werden die *Richtungsunterschiede* durch den *Winkel* bestimmt. Derselbe hat nur die Eigenschaft der *Grösse*.

Anm. Die Grösse einer Drehung ist durch kein reines Ausdehnungsgebilde absolut darstellbar. — In ihrer Beurtheilung muss das Auge sich ebenso üben, wie in derjenigen der Bewegungsgrösse eines Punktes, wenn nur Anfangs- und Endstellung desselben, nicht aber der verbindende Linientheil gegeben ist. — Der Winkel ist also kein Ausdehnungsgebilde, sondern eine arithmetische Grösse. — Und während die *Strecke* durch das entsprechende Ausdehnungsgebilde des *Linientheils* veranschaulicht werden kann, fehlt es dem *Winkel* an einem entsprechenden Ausdehnungsgebilde, welches seine Grösse *absolut* darstellte. Doch werden wir ein anderes Ausdehnungsgebilde kennen lernen, welches wenigstens zur *relativen* Darstellung der Grösse von mehreren Winkeln dienen, und so in die Lücke eintreten wird.

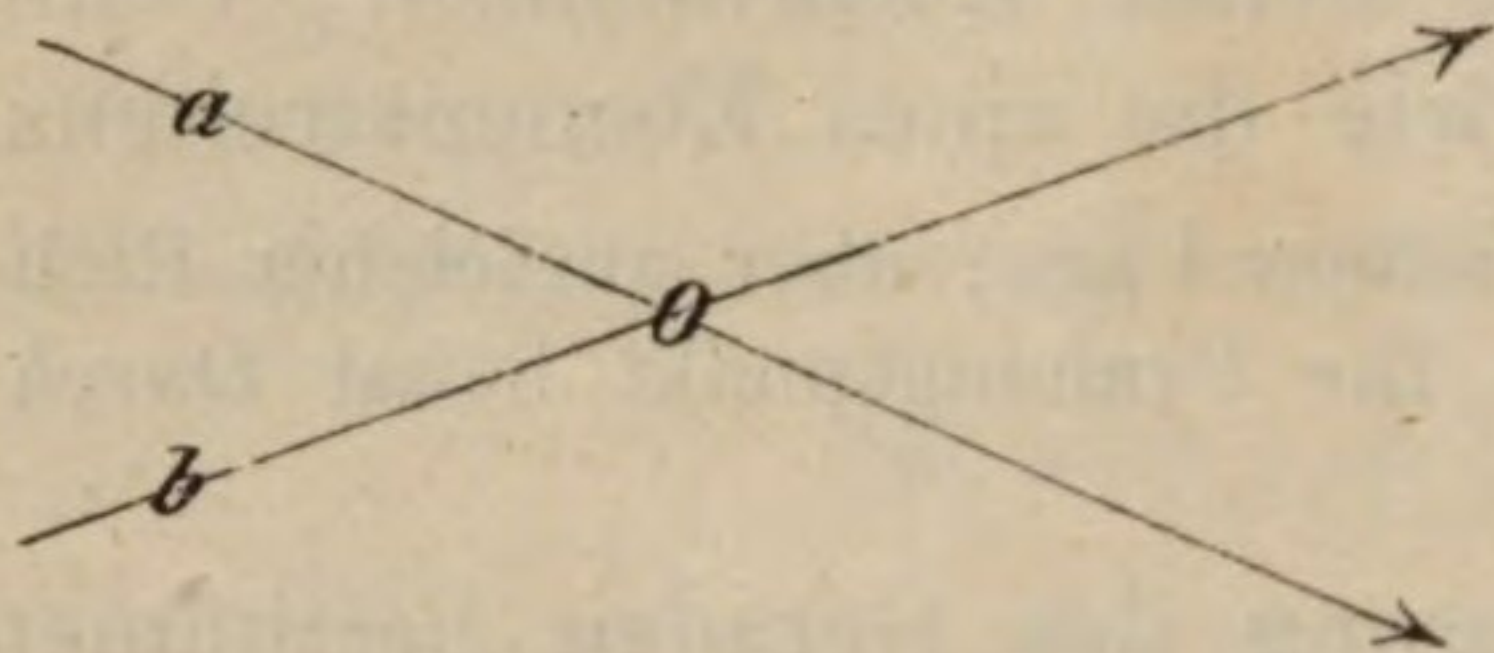
Für die Bestimmung des Winkels ist es natürlich nöthig, auf jeder der beiden Geraden nur *eine* ihrer beiden Richtungen festzuhalten. — In Bezug auf den Winkel heissen die beiden Geraden *Schenkel*; insbesondere führen sie diesen Namen von ihrem Durchschnittspunkte aus; letzterer Punkt heisst *Scheitel(punkt)* des Winkels.

Wenn eine Gerade *a* durch Richtungsänderung in *b* übergegangen ist, so ist die Lage des Drehungspunktes *O* für die neue Gerade *b* nur insoweit von Einfluss, als ihre *Lage* davon

abhängt. — Es entstehen also durch *gleich grosse Drehungen* einer Geraden *um verschiedene ihrer Punkte* auch *gleich gerichtete Geraden*, d. h.:

Haben zwei Geraden gleichen Richtungsunterschied gegen eine dritte, so haben sie auch gleiche Richtung, und umgekehrt.

67. Bei fortgesetzter Umdrehung um den Punkt O muss die Gerade a allmähig *alle* durch O möglichen Richtungen annehmen; d. h. alle Richtungen, welche der Punkt O selbst annehmen könnte, wenn er sich bewegte. Schliesslich muss sie



in die ursprüngliche Richtung a zurückkehren. Man hat dann:

$$a = a; \text{ oder } a \cdot (+1) = a.$$

Die Grösse derjenigen Drehung, welche eine Gerade in ihre ursprüngliche Richtung zurückführt, kann durch den Factor $(+1)$ ausgedrückt werden. Der einer solchen Drehung (einer „ganzen Umdrehung“) entsprechende Winkel kann ein *geschlossener Winkel* genannt werden. Und: *Multiplication einer Geraden mit $(+1)$ bedeutet eine ganze Umdrehung der Geraden.*

68. Eine Drehung von ebenfalls bestimmter Grösse wird die Gerade a in die entgegengesetzte Richtung bringen, d. h. $(+a)$ in $(-a)$ verwandeln. Man hat dann:

$$a \cdot (-1) = (-a).$$

Die Grösse derjenigen Drehung, welche eine Gerade a in die entgegengesetzte Richtung bringt, ist hiernach durch den Factor (-1) auszudrücken. Der entsprechende Winkel heisst ein *gestreckter Winkel*. — Ferner ist:

$$(-a) \cdot (-1) = a; \quad a \cdot (-1)^2 = a;$$

d. h.: Eine weitere gleich grosse Drehung führt die Gerade aus der entgegengesetzten Richtung in die ursprüngliche zurück. — Der gestreckte Winkel ist also die Hälfte des geschlossenen. Und: *Multiplication einer Geraden mit (-1) bedeutet eine halbe Umdrehung der Geraden.*

69. Suchen wir endlich denjenigen Factor x zu ermitteln, welcher eine Gerade um die *Halbte eines gestreckten Winkels* dreht. Dann ist

$a \cdot x = b; \quad bx = (-a);$
multiplicirt giebt dies:

$$ab \cdot x^2 = -ab = ab(-1);$$

oder:

$$x^2 = -1; \quad x = \sqrt{-1} = i.$$

Die Grösse derjenigen Drehung, welche der Hälfte eines gestreckten Winkels zukommt, ist also durch $\sqrt{-1}$ zu bezeichnen. Der entsprechende Winkel heisst *rechter Winkel*, und wird durch R bezeichnet. Die gegenseitige Richtung der Geraden a und b heisst *senkrecht* (*normal*).

Hiernach ist:

$$(+a)i = (+a)i^1 = (+b)$$

$$(+b)i = (+a)i^2 = (-a)$$

$$(-a)i = (+a)i^3 = (-b)$$

$$(-b)i = (+a)i^4 = (+a),$$

d. h.: durch vier successive Drehungen von gleicher Grösse

(i) gelangt die Gerade a

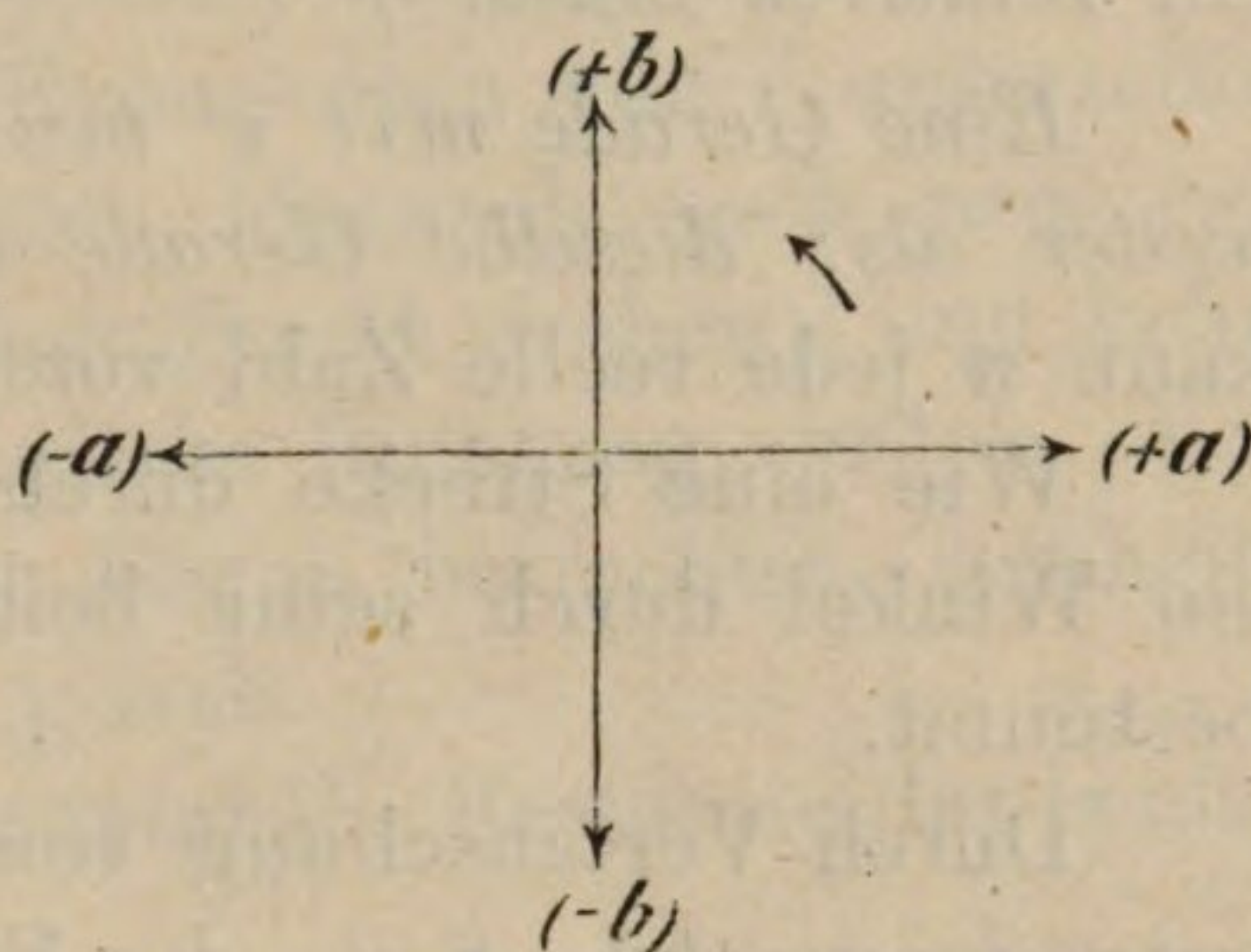
1. in die zu a *senkrechte* Richtung b ;
2. in die zu a *entgegengesetzte*, zu b *senkrechte* Richtung $(-a)$;
3. in die zu a *senkrechte*, zu b *entgegengesetzte* Richtung $(-b)$;
4. in die mit a *übereinstimmende*, zu b *senkrechte* Richtung a .

Also entsprechen jeder der vier Richtungen zwei senkrechte, untereinander entgegengesetzte Richtungen.

Die Drehung von a um | wird ausgedrückt durch den Factor

1 R	$i^1 = +i$
2 R	$i^2 = -1$
3 R	$i^3 = -i$
4 R	$i^4 = +1$
5 R	$i^5 = +i = i^1$
6 R	$i^6 = -1 = i^2$
7 R	$i^7 = -i = i^3$
8 R	$i^8 = +1 = i^4$
$\dots$	$\dots$
$n R$	$i^n = +i, -1, -i, +1,$

wenn $n = 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3, 4k + 4$.



Fortgesetzte Drehung über $4R$ hinaus führt die Gerade immer wieder in solche Richtungen, die sie schon früher inne gehabt.

Die Fähigkeit der Zahl i , alle Richtungsveränderungen einer Geraden durch ihren Exponenten auszudrücken, hängt mit der Thatsache zusammen, dass der rechte Winkel ebenso als Mass aller Winkel gebraucht wird, wie irgend eine als Längeneinheit bezeichnete Strecke als Mass aller Strecken. Nur ist der rechte Winkel ein absolutes, die Längeneinheit ein relatives Mass.*)

Eine Gerade mit i^n multipliciren bedeutet also nichts weiter als: dieselbe Gerade um n Rechte drehen. Dabei kann n jede reelle Zahl vorstellen.

70. Wie eine Strecke durch ihre beiden Endpunkte, so ist ein Winkel durch seine beiden Schenkel (a, b) vollständig bestimmt.

Durch Vertauschung von a und b erhält der Winkel die entgegengesetzte Seite der Ebene (d. h. er bleibt ungeändert, wenn man ihn von der entgegengesetzten Seite der Ebene betrachtet).

Hiernach entspricht, mit dem schon gefundenen Resultat übereinstimmend, die Ableitung eines Winkels aus zwei Ge-

*) In der höheren Analysis beweist man, dass

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}},$$

wo $\frac{\pi}{2}$ das dem rechten Winkel entsprechende Ausdehnungsgebilde, gemessen durch eine Strecke, bedeutet. Hieraus erhält man:

$$i^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}i}; \quad i = e^{\frac{\pi}{2}i};$$

also:

$$i^n = e^{\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)i}.$$

Der letztere Factor $e^{\alpha i}$ ist derjenige, dessen sich H. Grassmann zur Bezeichnung einer Drehung bedient (vgl. Ausdehnungslehre I. Vorrede S. XI ff.). Dagegen hat, wie man sieht, in der elementaren Darstellung i^n den Vorzug der grösseren Einfachheit. — Die letzte Formel zeigt übrigens noch den Zusammenhang zwischen dem Winkel α und dem Winkel R . Wird nämlich die Grösse des rechten Winkels durch die Zahl $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet, sodass $\alpha = n \cdot \frac{\pi}{2} = nR$, so ist eben $i^n = e^{\alpha i}$.

raden der Ableitung eines *Quotienten* aus *Dividend* und *Divisor*; man kann also sagen: Der Quotient zweier Richtungen ist der durch dieselben bestimmte Winkel. In Buchstaben:

$$a : b = i^n;$$

$$b : a = 1 : i^n = i^{(-n)}.$$

Anm. Winkel, die grösser sind als ein gestreckter, heissen *convex*; solche, die kleiner sind: *concav*. Concave Winkel, die grösser sind als ein rechter, heissen *stumpf*, solche, die kleiner sind: *spitz*.

Die beiden Drehungen, durch welche b aus a , und a 71. aus b entsteht, heissen *entgegengesetzt*, und werden durch die entgegengesetzten Zeichen im Exponenten von i unterschieden. — Jede Gerade a kann sich hiernach nach zwei entgegengesetzten Seiten um denselben Punkt drehen, und kehrt in beiden Fällen in die ursprüngliche Richtung zurück. Von der entgegengesetzten Seite der Ebene betrachtet, erscheint die zweite Drehung der ersten gleich.

Folgende Zusammenstellung zeigt die Resultate der beiden Drehungen:

$$a \cdot i^1 = b \cdot i^0 = +b. \quad a \cdot i^{-1} = a \cdot \frac{1}{i} = a \cdot (-i) = -a \cdot i = -b.$$

$$a \cdot i^2 = b \cdot i^1 = -a. \quad a \cdot i^{-2} = a \cdot \frac{1}{i^2} = a \cdot (-1) = -a \cdot 1 = -a.$$

$$a \cdot i^3 = b \cdot i^2 = -b. \quad a \cdot i^{-3} = a \cdot \frac{1}{i^3} = a \cdot (+i) = +a \cdot i = +b.$$

$$a \cdot i^4 = b \cdot i^3 = +a. \quad a \cdot i^{-4} = a \cdot \frac{1}{i^4} = a \cdot (+1) = +a \cdot 1 = +a.$$

Jede Gerade a kann also auch auf zwei entgegengesetzten Wegen in die Richtung b gelangen.

Sei $a \cdot i^m = b$ der eine, und $a \cdot i^n = b$ der andere; dann erhält man durch Division:

$$i^{m-n} = 1 = \begin{cases} (i^0) \\ i^4 \end{cases};$$

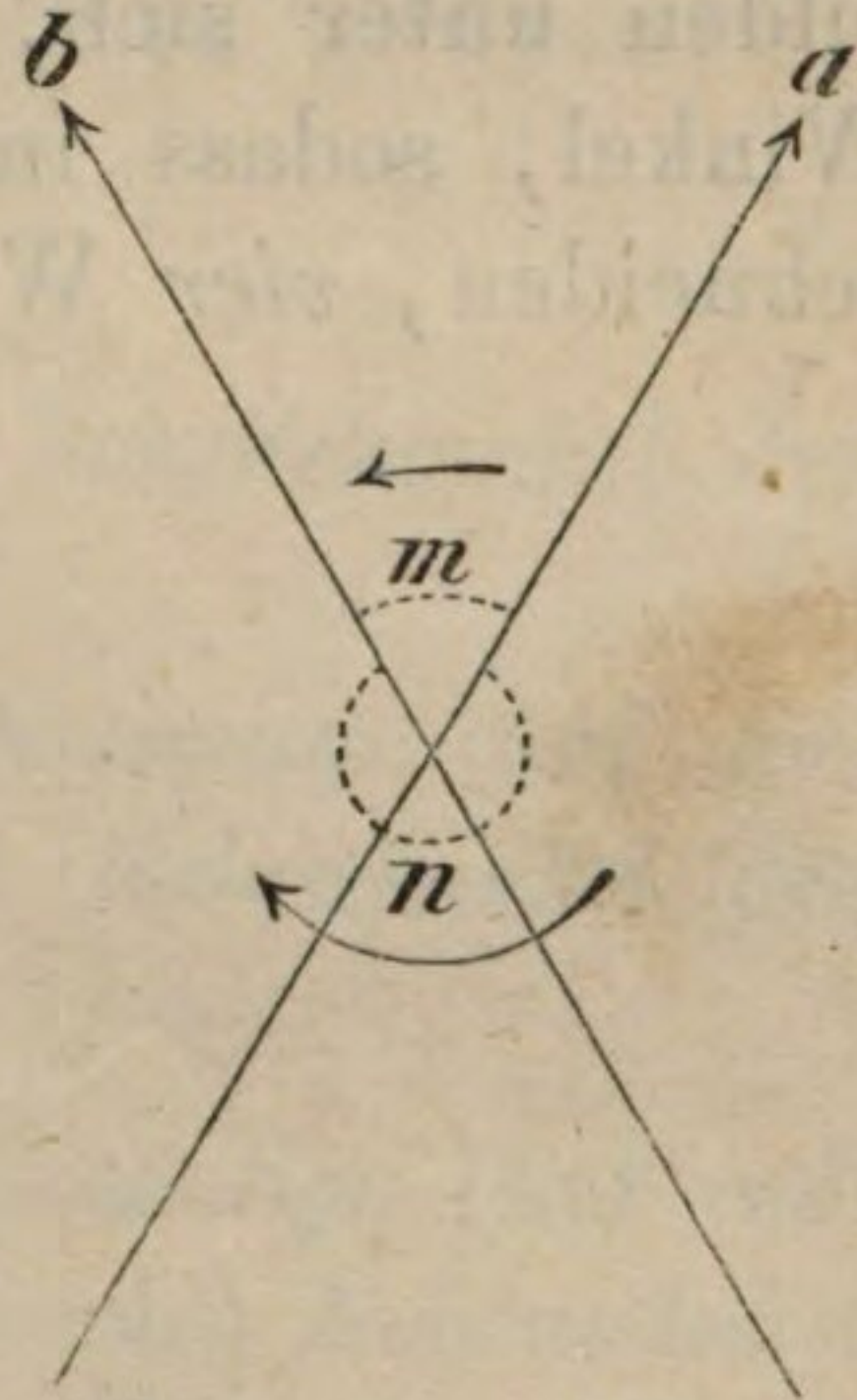
d. h.: (entweder

$$m - n = 0; \quad m = n$$

oder):

$$m - n = 4; \quad m = 4 + n;$$

d. h.: die absolute Summe der beiden Drehungen ist einer Umdrehung gleich.



Anm. Der Doppelsinn des Quotienten $(b : a)$, der sich in der doppelten Bedeutung i^m und i^n wiederfindet (selbst wenn, wie gewöhnlich, $m < 4$ genommen wird), pflegt dadurch beseitigt zu werden, dass man unter $(b : a)$, wenn nichts weiter bestimmt ist, denjenigen Winkel i^m versteht, in welchem $m < 2$ ist, d. h. den *concaven* Winkel.

72. Wie jeder der beiden Endpunkte einer Strecke, so kann auch jeder der beiden Schenkel eines Winkels als erzeugendes Gebilde angesehen werden. Aus

$$b : a = i^m$$

folgt:

$$a : b = \frac{1}{i^m} = i^{-m} = \left(\frac{1}{i}\right)^m = (-i)^m.$$

Zwei Geraden (a, b) bilden also stets einen Winkel in doppeltem Sinne, je nachdem a oder b als bewegte Gerade angenommen wird.

Anm. Die *entgegengesetzten Drehungen* werden durch die *entgegengesetzten Exponenten* ausgedrückt; die *entgegengesetzten Seiten der Ebene* dagegen durch die *entgegengesetzten Zeichen von i* . — Insbesondere sagt die Formel

$$a : b = i^{-m} = (-i)^m :$$

Wenn man von der Drehung a nach b ($b : a$) den Uebergang zur entgegengesetzten Drehung b nach a ($a : b$) machen will, so muss man *entweder* die Richtung der Drehung auf derselben Seite der Ebene in die entgegengesetzte verwandeln (m in $-m$) *oder* dieselbe Drehung auf die entgegengesetzte Seite der Ebene übertragen ($+i$ in $-i$ verwandeln).

73. Auch die entgegengesetzten Richtungen von a und b bilden unter sich, und mit den ursprünglichen Richtungen Winkel, sodass im Ganzen überall, wo zwei Geraden sich schneiden, *vier* Winkel entstehen, nämlich:

$$1) \quad \frac{+a}{+b} = + \frac{a}{b} = i^m$$

$$2) \quad \frac{-b}{+a} = - \frac{b}{a} = i^n$$

$$3) \quad \frac{-a}{-b} = + \frac{a}{b} = i^m$$

$$4) \quad \frac{+b}{-a} = - \frac{b}{a} = i^n.$$

Hieraus folgt: Die Winkel der entgegengesetzten Richtungen (*Scheitelwinkel*) sind denen der ursprünglichen gleich. (*Scheitelwinkel sind einander gleich.*)

Ferner erhält man:

$$i^m \cdot i^n = -1;$$

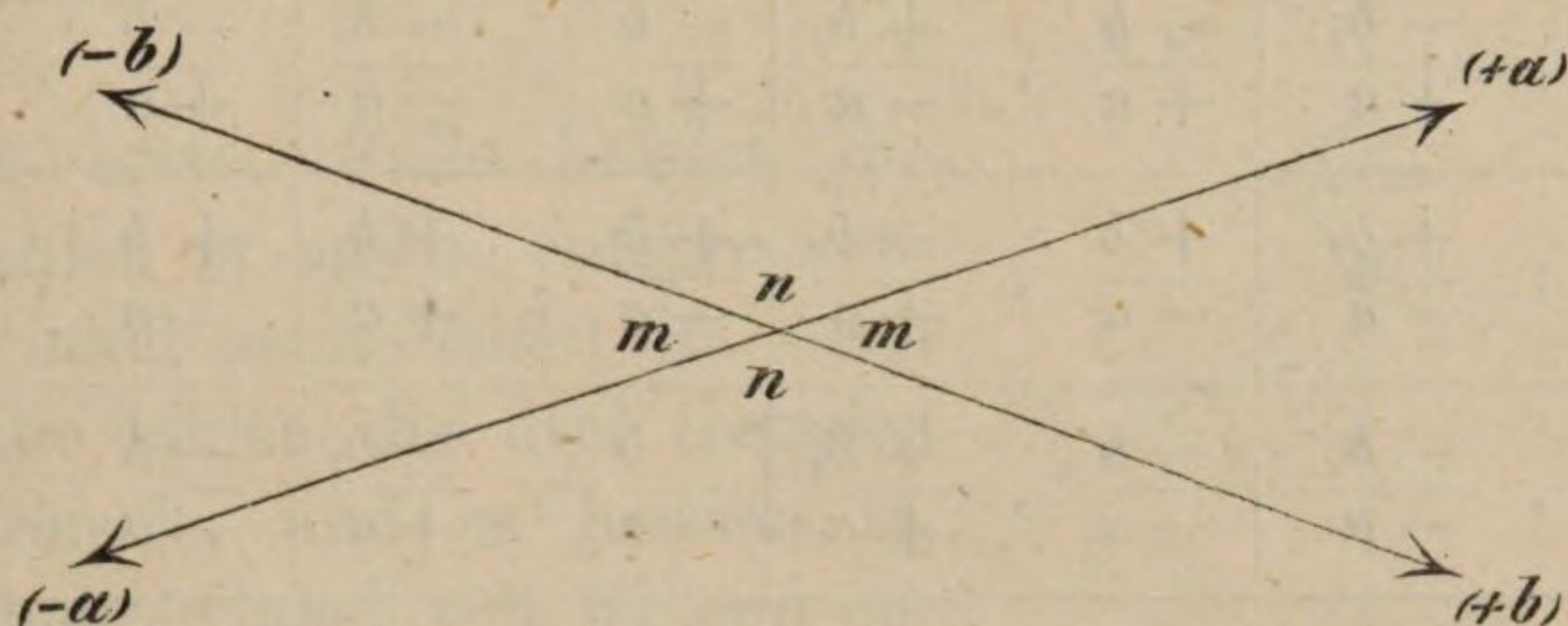
oder:

$$i^{m+n} = -1,$$

d. h.:

$$m + n = 2,$$

d. h.: die Winkel, welche eine Gerade mit den beiden ent-



gegengesetzten Richtungen einer anderen bildet (*Nebenwinkel*) betragen zusammen zwei Rechte.

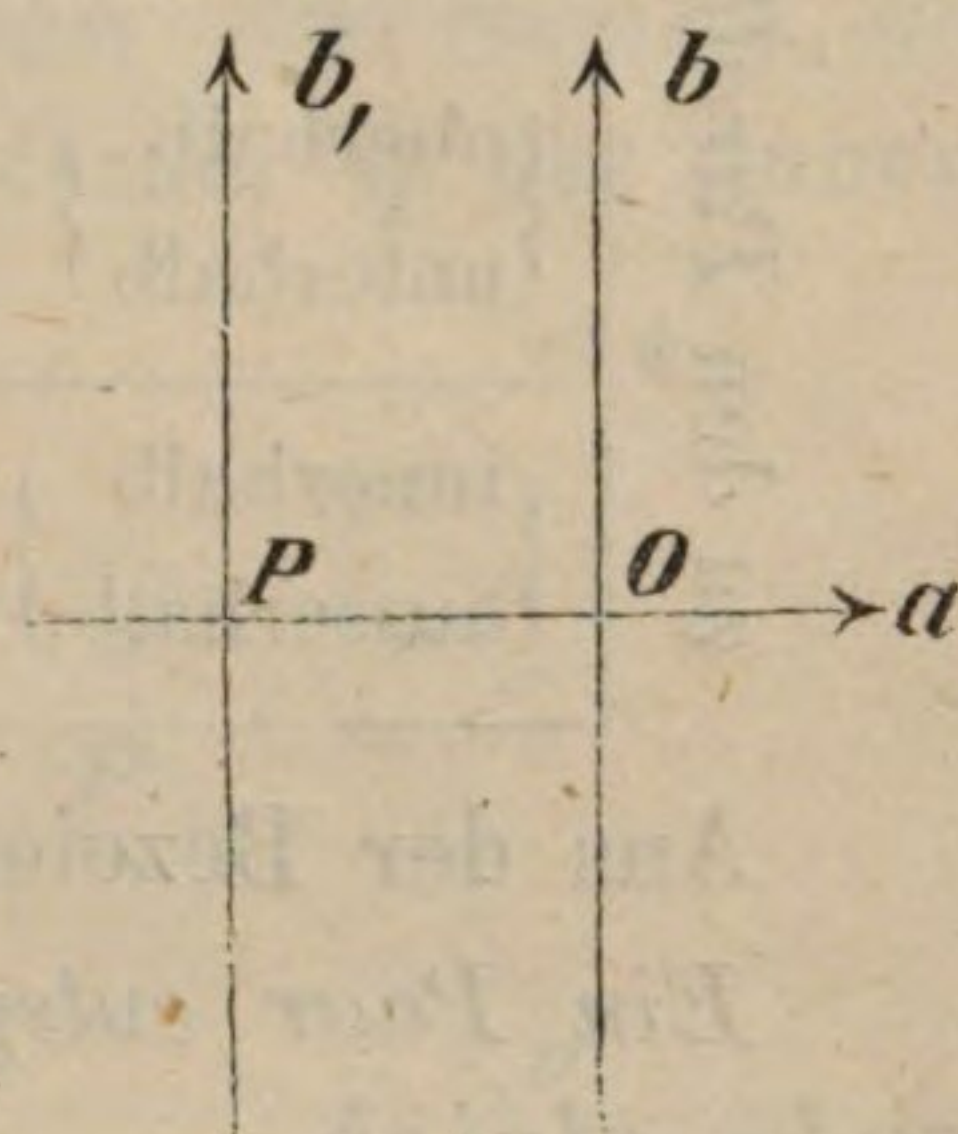
Wenn eine Gerade a gleich grosse Drehungen um zwei verschiedene Punkte O, P macht, und dadurch in die Richtungen b, b_1 geräth, so ist:

$$a \cdot i^m = b \quad \text{und} \quad a \cdot i^m = b_1;$$

$$\text{d. h.:} \quad b = b_1.$$

Dann also sind die neuen Richtungen gleich, d. h. die Geraden parallel.

Die Winkel, welche zwei Parallelen mit einer dritten Geraden bilden, heissen *entsprechende* (correspondirende) Winkel.



Ein entsprechender Winkel und der *Scheitelwinkel* des anderen heissen zusammen *Wechselwinkel*.

Ein entsprechender Winkel und der *diesseitige* (auf derselben Seite der dritten Geraden liegende) *Nebenwinkel* des anderen heissen zusammen *Gegenwinkel*.

Ein entsprechender Winkel und der *jenseitige* (auf entgegengesetzter Seite der dritten Geraden liegende) *Nebenwinkel* des anderen heissen zusammen *verschränkte Winkel*.

Da die Parallelen sowohl, wie die dritte Gerade, in doppelter Richtung genommen werden können, so sind vier

Paare entsprechender Winkel vorhanden, und ebenso viele Paare von jeder der übrigen Arten. Es sind

Entsprechende W.	Wechselw.	Gegenw.	Verschränkte W.
$\frac{+b}{+a}, \frac{+b_1}{+a}$	$\frac{+b}{+a}, \frac{-b_1}{-a}$	$\frac{+b}{+a}, \frac{+b_1}{-a}$	$\frac{+b}{+a}, \frac{-b_1}{+a}$
$\frac{-b}{+a}, \frac{-b_1}{+a}$	$\frac{-b}{+a}, \frac{+b_1}{-a}$	$\frac{-b}{+a}, \frac{-b_1}{-a}$	$\frac{-b}{+a}, \frac{+b_1}{+a}$
$\frac{+b}{-a}, \frac{+b_1}{-a}$	$\frac{+b}{-a}, \frac{-b_1}{+a}$	$\frac{+b}{-a}, \frac{+b_1}{+a}$	$\frac{+b}{-a}, \frac{-b_1}{-a}$
$\frac{-b}{-a}, \frac{-b_1}{-a}$	$\frac{-b}{-a}, \frac{+b_1}{+a}$	$\frac{-b}{-a}, \frac{-b_1}{+a}$	$\frac{-b}{-a}, \frac{+b_1}{-a}$

Hiernach liegen

zur dritten Geraden

zu den Parallelen		auf derselben S.	auf entgegenges. S.
	{ oberhalb unterhalb }	Entsprechende W.	Verschränkte W.
	{ innerhalb ausserhalb }	Gegenwinkel.	Wechselwinkel.

Aus der Bezeichnung dieser Winkel folgt:

Ein Paar entsprechende oder Wechselwinkel sind einander gleich.

Ein Paar verschränkter oder Gegenwinkel beträgt zusammen zwei Rechte.

b) Mehrmalige Drehung der Geraden. — Mehrere Winkel.

75. Wenn sich eine Gerade a nach derselben Seite erst um mR bis b und dann um nR bis c dreht, so hat sie sich im Ganzen um $(m + n)R$ von a bis c gedreht. Wenn nun

$$b : a = i^m; \quad c : b = i^n; \quad c : a = i^p;$$

so ist:

$$(b : a) \cdot (c : b) = (c : a) \quad \text{oder} \quad i^m + i^n = i^p,$$

$$\text{d. h.} \quad m + n = p.$$

Demnach ist der letztere Winkel das Product der beiden ersteren; oder: *Das Product zweier mit dem Scheitel und einem Schenkel aneinander gelegten Winkel ist der Winkel zwischen ihren anderen Schenkeln.*

Gleichgiltig ist es dabei, ob die beiden Drehungen um denselben Punkt O , oder um zwei verschiedene Punkte O , P stattfinden.

Im ersten Falle heissen die den Zahlen m und n entsprechenden Winkel *anstossende*; im zweiten Falle bilden die drei Geraden ein Dreieck, und es heissen m , der Scheitelwinkel von n , und der Nebenwinkel zu p (in abgekürzter Ausdrucksweise) *innere Winkel* des Dreiecks; die Nebenwinkel derselben *äussere Winkel* des Dreiecks, und die letzte Formel $m + n = p$ giebt den Satz: *Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel.* — Ist ferner q der innere Nebenwinkel von p , so ist $p + q = 2$, also auch $m + n + q = 2$, d. h.: *die drei Innenwinkel eines Dreiecks betragen zusammen zwei Rechte.*

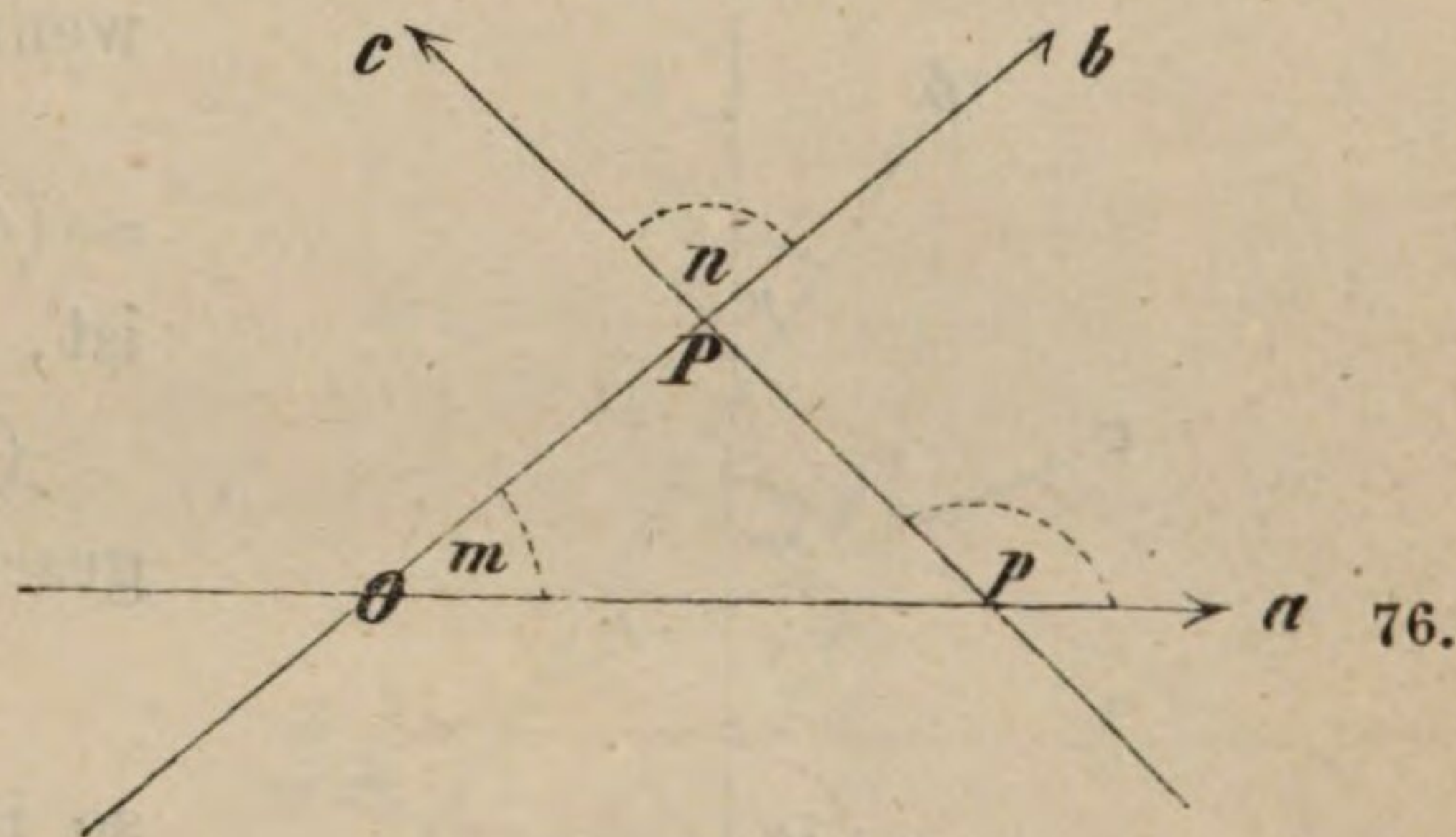
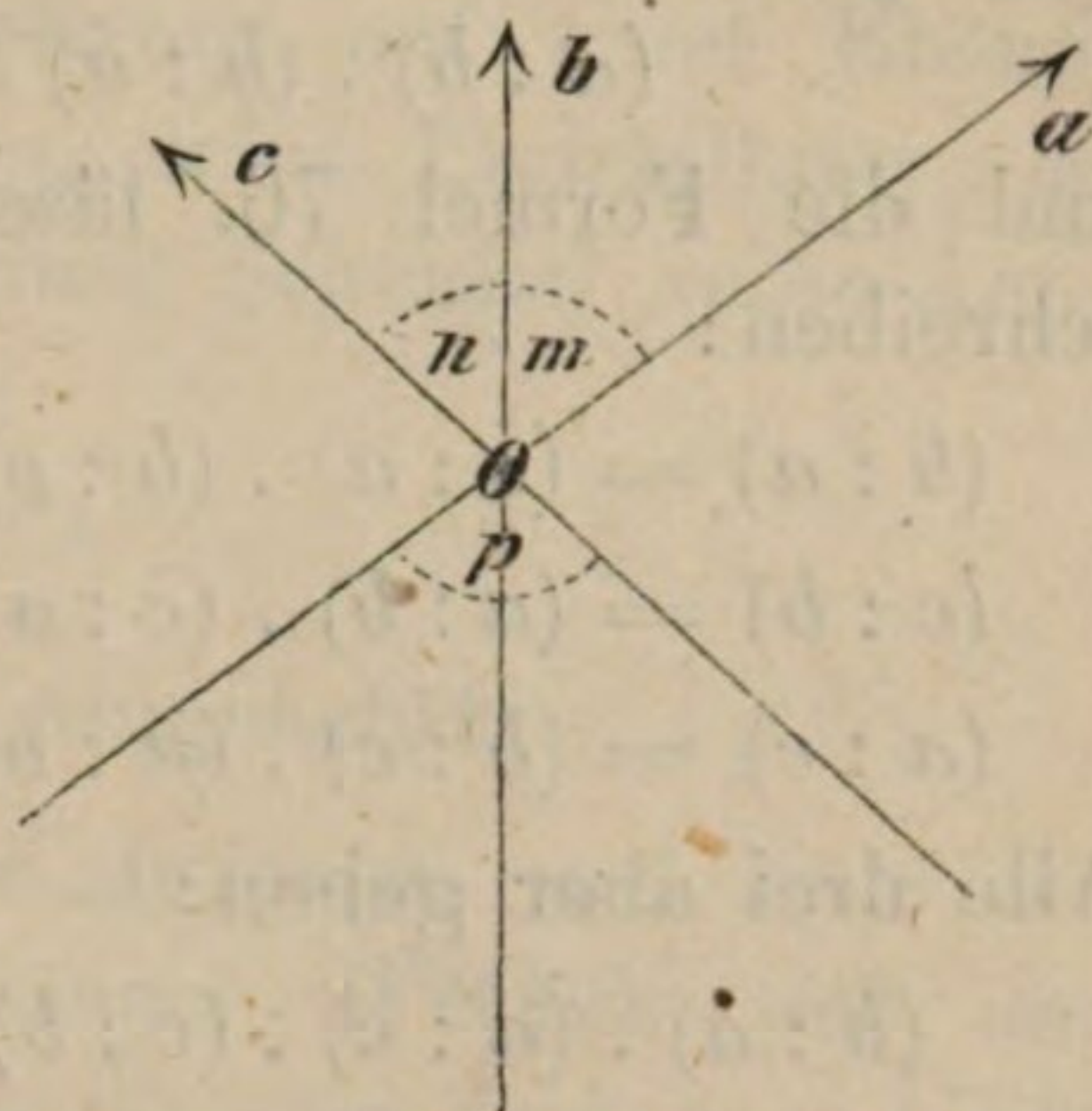
Durch Anwendung des Begriffs der *Division* erhält man:

$(b : a) = (c : a) : (c : b)$ oder $m = p - n$; $n = p - m$, d. h.: *Der Quotient zweier mit dem Scheitel und einem Schenkel aufeinander gelegten Winkel ist der Winkel zwischen ihren anderen Schenkeln.*

Fallen die Geraden a und b zusammen, d. h. ist $a = b$, 77. so ist:

$$(a : a) = (c : a) : (c : a) = 1. \quad m = 0; \quad n = p.$$

Fallen die Geraden a und c zusammen, d. h. ist $a = c$, 78. so ist:



Turner

Diff.

$$(b : a) = (a : a) : (a : b) = \frac{1}{a : b} \quad m = -n; \quad n = -m.$$

Winkel mit entgegengesetzter Drehung, oder auf entgegengesetzter Seite der Ebene werden behandelt wie einfache und umgekehrte Zahlen. ✓

79. Aus 78. folgt noch:

$$(a : b) \cdot (b : a) = 1, \quad m + n = 0,$$

und die Formel 76. lässt sich in folgenden drei Formen schreiben:

$$\begin{aligned} (b : a) &= (c : a) \cdot (b : c) & (+m) &= (+p) + (-n) \\ (c : b) &= (a : b) \cdot (c : a) & (+n) &= (-m) + (+p) \\ (a : c) &= (b : c) \cdot (a : b) & (+p) &= (+n) + (+m). \end{aligned}$$

Alle drei aber geben:

$$(b : a) \cdot (a : c) \cdot (c : b) = 1, \quad m + n - p = 0,$$

womit die Ausdehnung unserer Betrachtung auf mehr als zwei Winkel eingeleitet wird.

80. Anwendung des Begriffs der *Potenzirung*. — Seien ν Winkel in einer Ebene: $(b : a), (c : b), (d : c) \dots (n : m)$ einander gleich, so kann, wenn

$$\begin{aligned} (b : a) &= (c : b) \\ &= (d : c) = \dots = (n : m) = i^\mu \end{aligned}$$

ist, das Product derselben:

$$(n : a) = (i^\mu)^\nu = i^{\mu\nu}$$

gesetzt werden. Sei

$$\frac{n}{a} = i^\sigma,$$

so ist:

$$\sigma = \mu\nu,$$

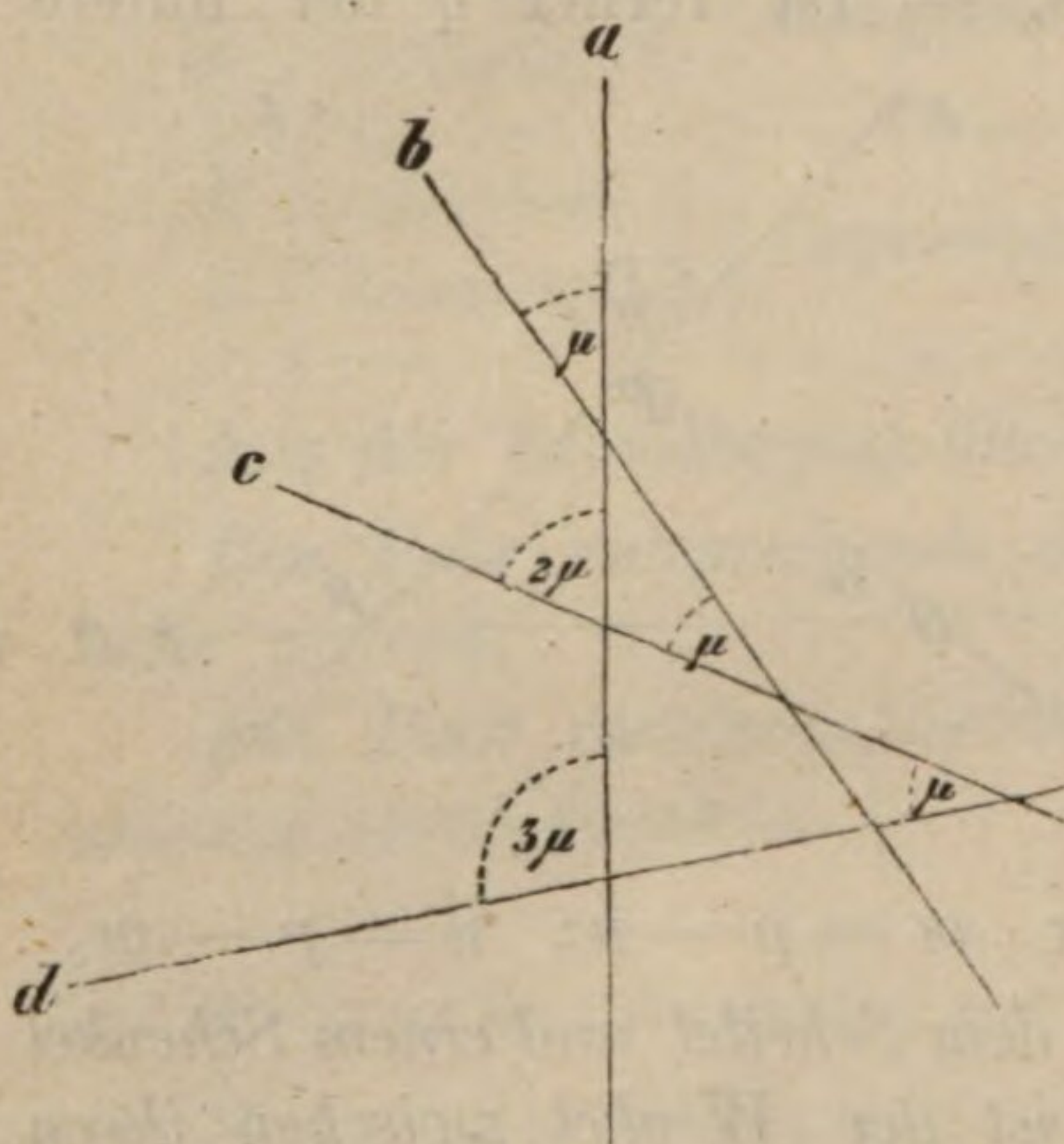
oder:

$$\sigma : \mu = \nu;$$

d. h.: der Quotient zweier

Winkel in derselben Ebene ist eine Zahl.

Anm. Die doppelte Darstellung eines Winkels als Quotient zweier Geraden, und als Vielfaches des als Einheit genommenen rechten Winkels, der im Exponenten von i erscheint, hat zur Folge, dass die Vereinigung von Winkeln durch die erste und durch die zweite Rechnungsstufe ausführbar ist, je nachdem die eine oder die andere Betrachtungsweise gewählt wird. In der vorstehenden Darstellung laufen



beide Entwicklungen parallel. — Für Winkel *auf derselben Seite* der Ebene ist die *zweite* Betrachtungsweise die übliche, weil dann die Behandlung der Winkel derjenigen der Strecken conform ist; für Winkel *auf entgegengesetzter Seite* der Ebene würde sich die *erste* empfehlen.

c) Bewegung eines Winkels auf einer Ebene.

Bewegt ein Winkel i^p sich beliebig auf einer Ebene, 81. und ist $(b : a)$ seine Anfangs-, $b_1 : a_1$ seine Endstellung, so erleidet der Richtungsunterschied seiner Schenkel keine Aenderung; also ist:

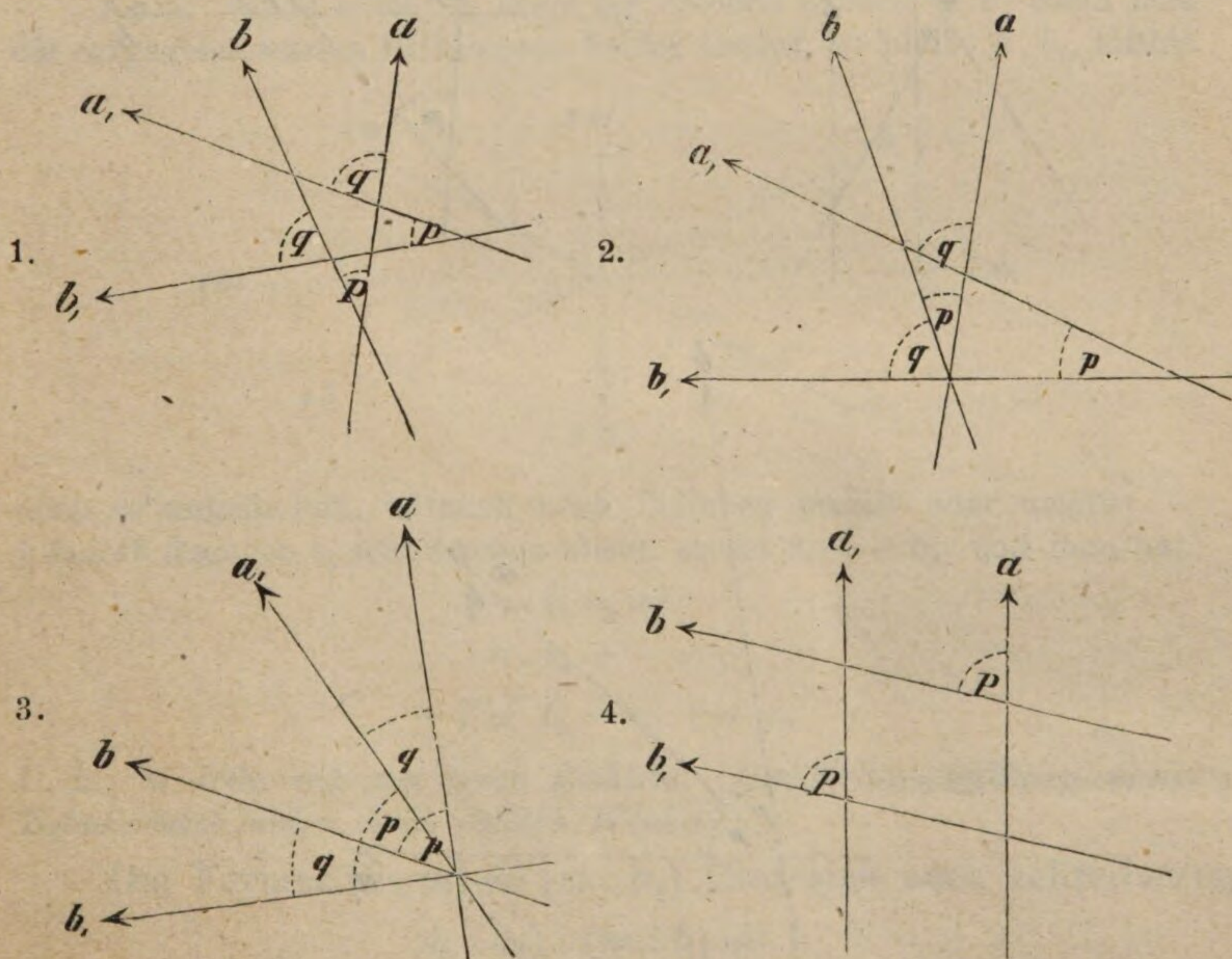
$$(b : a) = (b_1 : a_1).$$

Hieraus folgt:

$$(b : b_1) = (a : a_1) \text{ und umgekehrt,}$$

d. h.: Anfangs- und Endrichtung eines bewegten Winkels drehen sich um gleiche Grössen.	Wenn Anfangs- und Endrichtung eines Winkels sich um gleiche Grössen drehen, so bleibt ihr Winkel ungeändert.
--	--

Anm. Je nachdem um den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels *beide*, oder *ein*, oder *kein* Schenkel sich dreht, sind für diese Bewegung *drei* Fälle zu unterscheiden, die jedoch nicht wesentlich verschieden sind. Dazu kommt als *vierter* Fall Lagenänderung der Schenkel.



82. Sei $(b : a) = i^p$; $(b : b_1) = i^{-q}$.

Dann ist:

$$b = a \cdot i^p = b_1 \cdot i^{-q},$$

d. h.: Das Product aus einem Winkel und seiner Anfangsrichtung ist seine Endrichtung.

Ferner:

$$a = b : i^p \quad ; \quad b_1 = b : i^{-q},$$

d. h.: Der Quotient aus der Endrichtung und dem Winkel ist gleich der Anfangsrichtung.

Ferner:

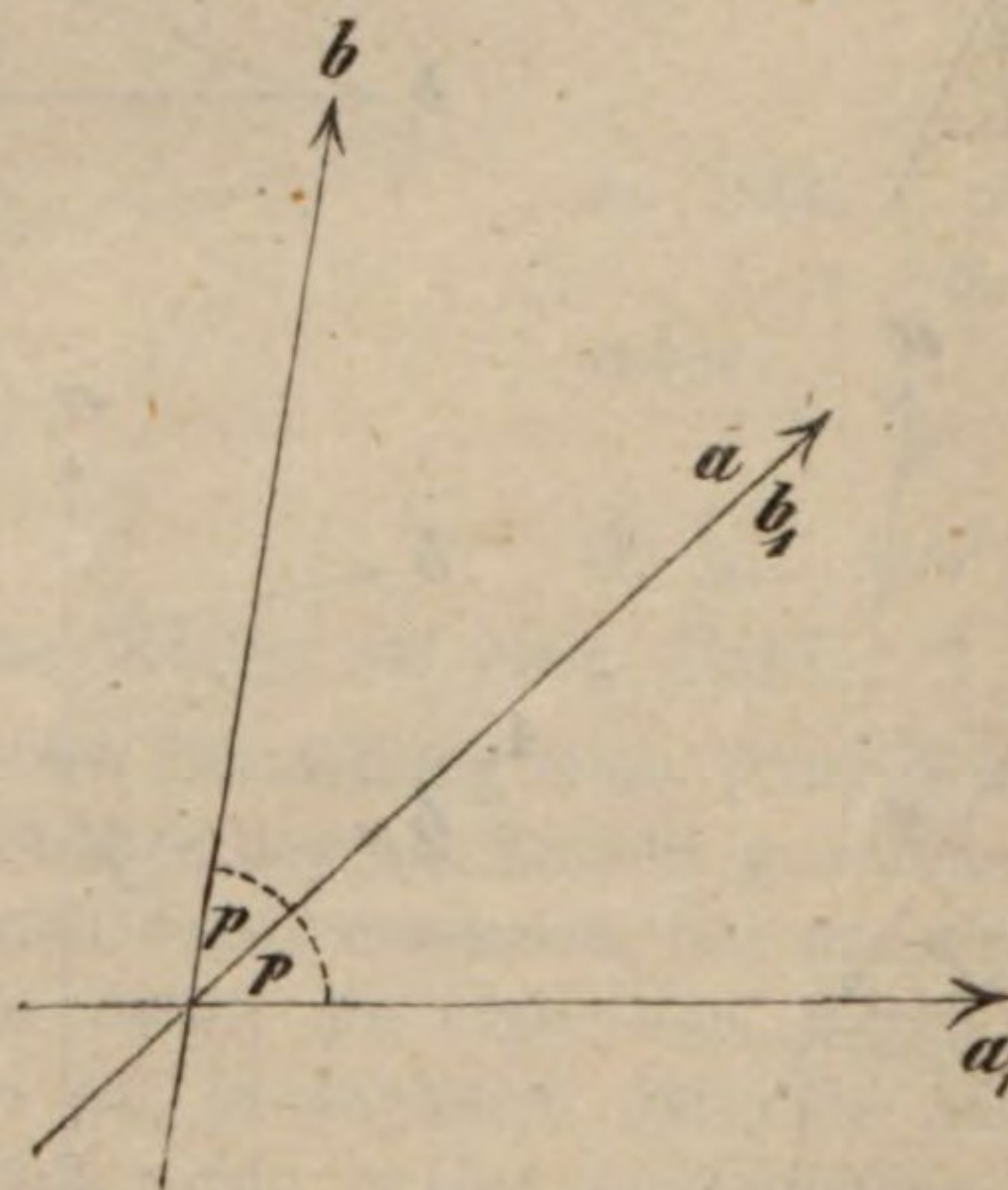
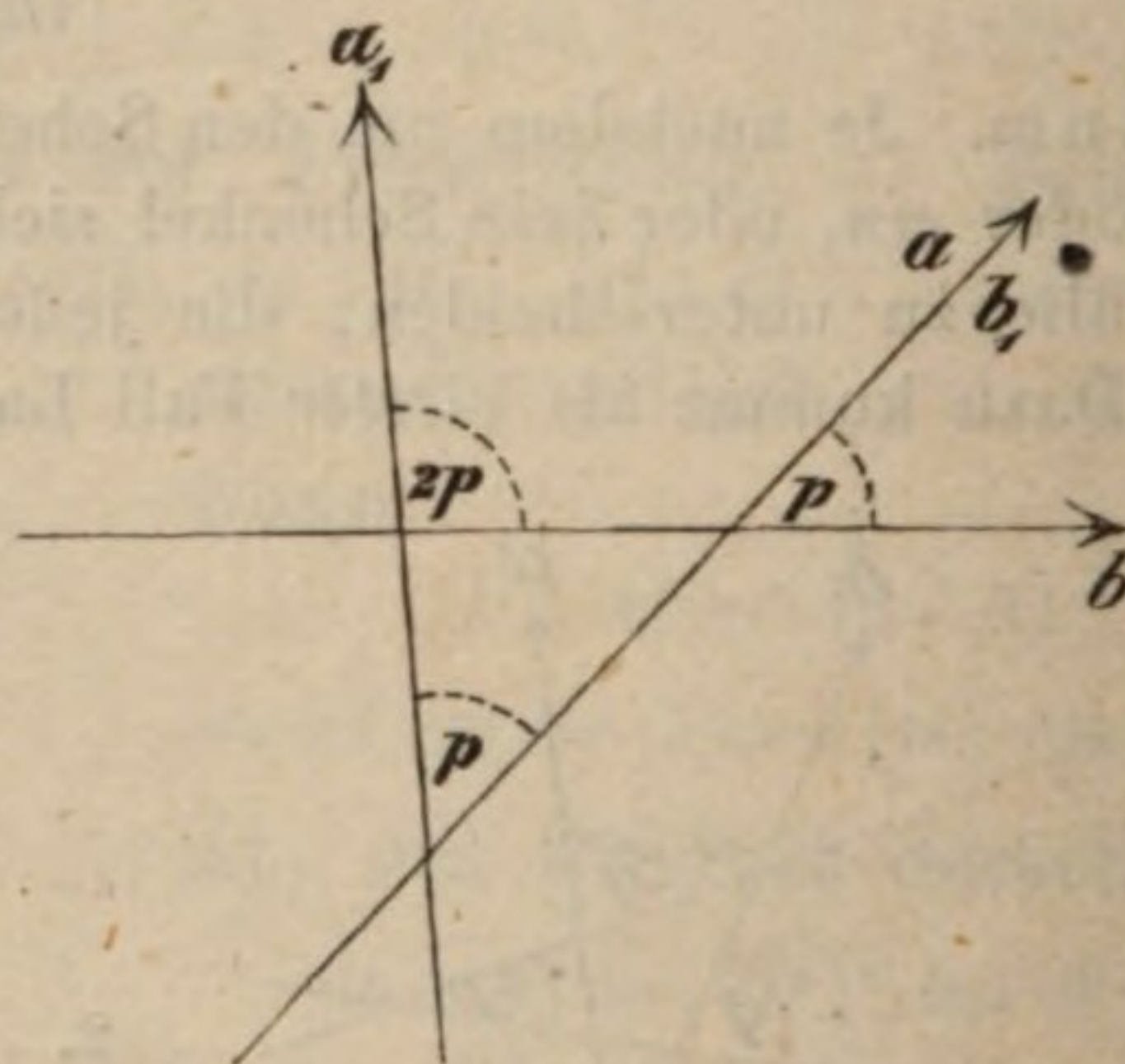
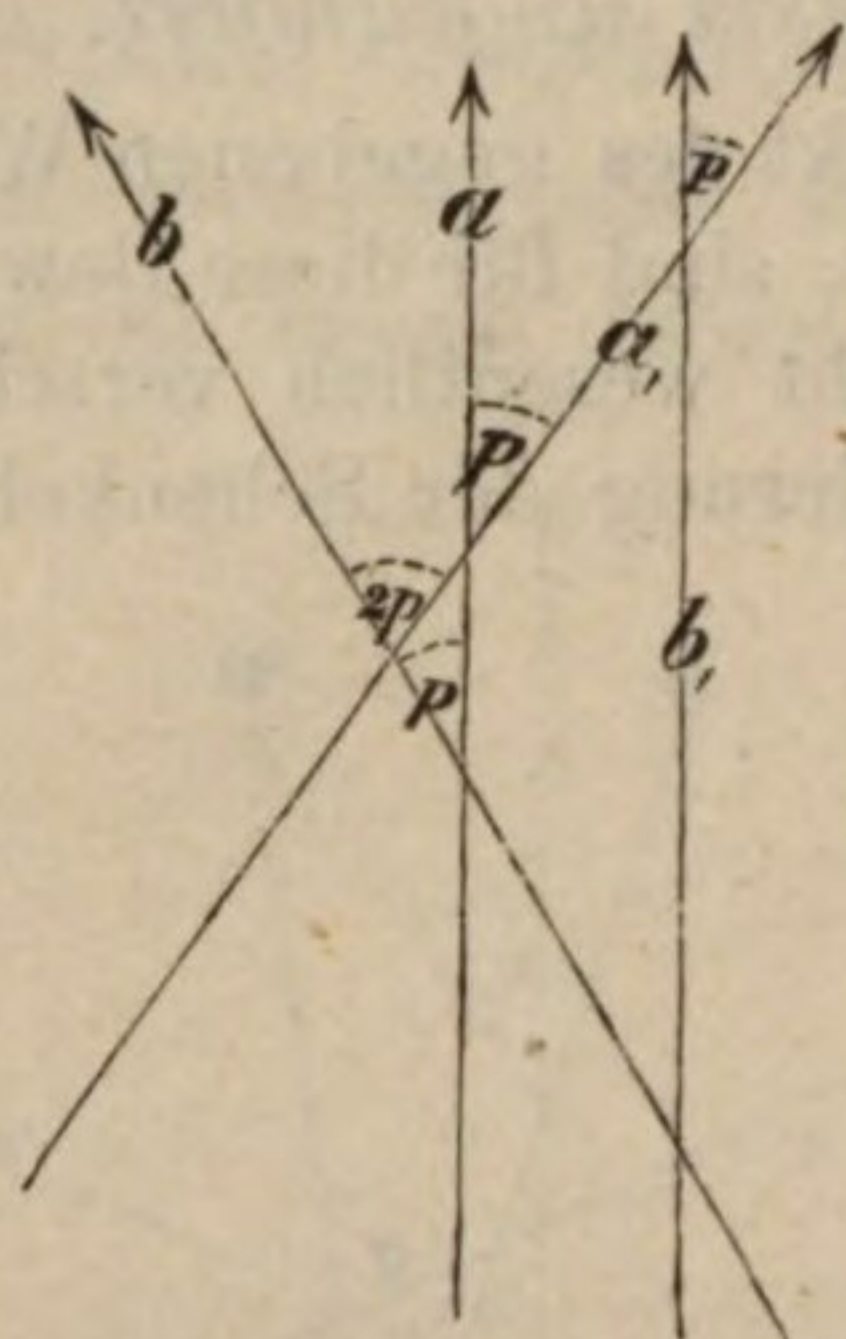
$$b_1 : a = i^{q+p} \quad ; \quad b : a_1 = i^{-q+p}.$$

83. Die Formeln in 81. werden gleichlautend, wenn

$$a = b_1 = m, \quad \text{also} \quad p = -q.$$

Beide lauten dann:

$$(b : m) = (m : a_1),$$



d. h. m hat gleichen Richtungsunterschied gegen a_1 und b . Die Gerade m heisst die *Mittelrichtung* von a_1 und b , oder die *Halbirungslinie* des Winkels $(b : a_1)$.

Aus der letzten Formel folgt:

$$b \cdot a_1 = m \cdot m = m^2; \quad \text{Die zweite Wurzel aus dem Pro-}$$

oder: $m = \pm \sqrt[2]{b \cdot a_1}.$ *ducte zweier Richtungen stellt ihre Mittelrichtung dar.*

Das doppelte Vorzeichen der Wurzel entspricht der doppelten Richtung von m .

Ferner ist in diesem Falle:

$$(b_1 : a) = 1; \quad (b : a_1) = i^{2p}. \quad \text{Die Halbirungslinie theilt den}$$

oder: *Winkel in zwei gleiche Theile.*

$$m = \pm \sqrt[2]{a_1^2 i^{2p}} = \pm a_1 i^p.$$

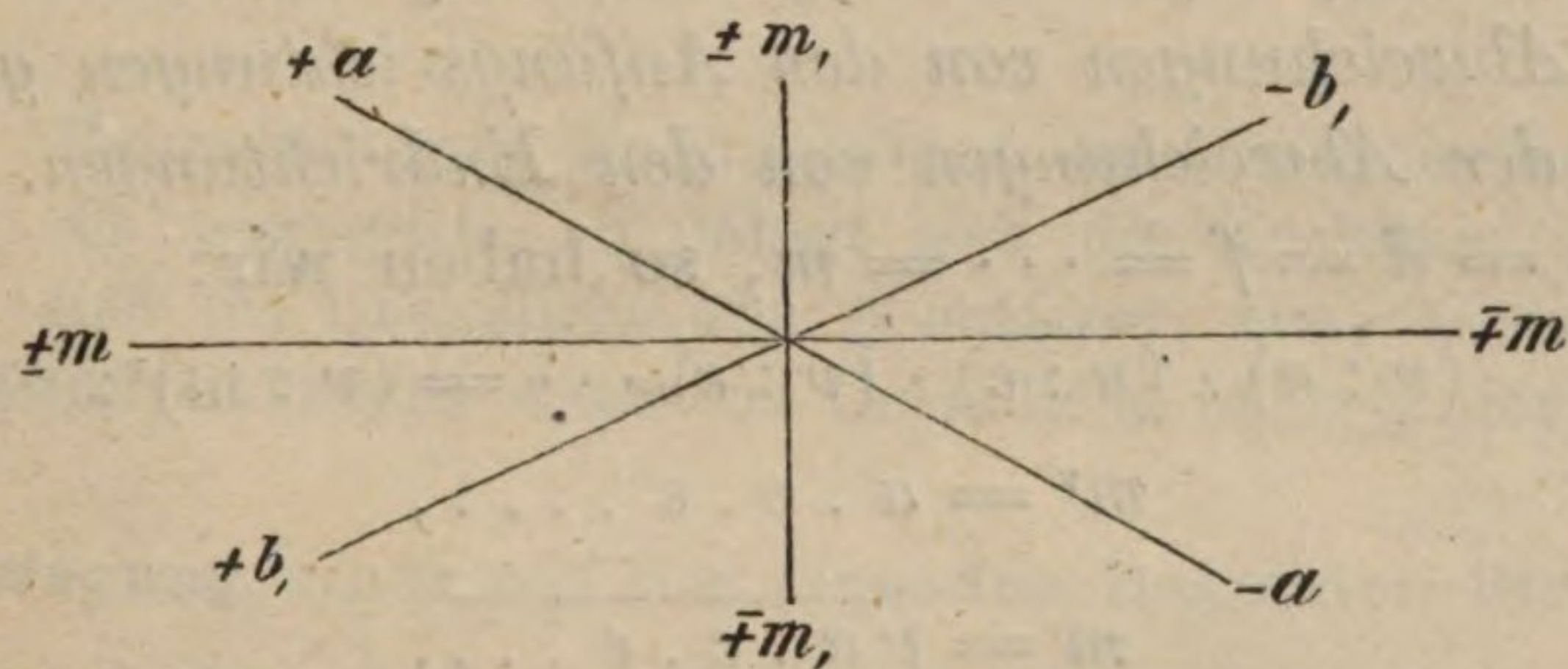
Die Formeln in 81. kann man übereinstimmend schreiben: 84.

$$b \cdot a_1 = a \cdot b_1 \quad \text{Wenn zwei Winkel einander}$$

oder: *gleich sind, so haben die Winkel zwischen der Anfangsrichtung des einen und der Endrichtung des anderen gleiche Mittelrichtungen.*

$$\sqrt{b \cdot a_1} = \sqrt{a \cdot b_1} = m.$$

Anm. Wenn a und b_1 beide ihr Zeichen ändern, d. h. wenn man die entgegengesetzten Richtungen beider nimmt, so bleibt $a \cdot b_1$, mithin



auch m ungeändert, nämlich nach Belieben positiv oder negativ. — Ändert dagegen b_1 sein Zeichen allein, so sei $b_1 = -b_2$, und man hat:

$$-a \cdot b_2 = m^2;$$

$$a \cdot b_2 = -m^2;$$

$$\pm \sqrt{a \cdot b_2} = m \cdot i = m_1.$$

D. h.: m dreht sich um einen Rechten. (Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel bilden einen rechten Winkel.)

Die Formel $(b : m) = (m : a_1)$ lässt sich auch schreiben: 85.

$$(m : a_1) \cdot (m : b) = 1.$$

Nunmehr lässt sich der Begriff der Mittelrichtung dahin erweitern, dass man sagt: Für ν Richtungen $a, b, c \dots n$ ist diejenige Richtung m die Mittelrichtung, welche der Bedingung genügt:

$$(m : a) \cdot (m : b) \cdot (m : c) \dots (m : n) = 1,$$

oder:

$$m = \sqrt[\nu]{a \cdot b \dots n}.$$

86. Winkel, die *nicht an* einander liegen (d. h. Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben), können wir *vereinigen*, indem wir sie erst durch Schiebung, resp. Drehung aneinanderlegen und dann addiren.

87. Sei das Product von ν Winkeln gleich Eins; also:

$$(b : a) \cdot (d : c) \cdot (f : e) \dots = 1.$$

Dann können wir alle diese Winkel durch die Abweichungen ihrer Schenkel von einer einzigen *beliebigen festen* Richtung ν ausdrücken, indem wir setzen:

$$(b : a) = (\nu : a) : (\nu : b)$$

$$(d : c) = (\nu : c) : (\nu : d),$$

sodass:

$$(\nu : a) \cdot (\nu : c) \cdot (\nu : e) \dots = (\nu : b) (\nu : d) (\nu : f) \dots,$$

d. h.: Wenn das Product von ν Winkeln auf einer Ebene Eins ist, so ist für jede beliebige Richtung der Ebene das Product der Abweichungen von den Anfangsrichtungen gleich dem Producte der Abweichungen von den Endrichtungen.

88. Ist $b = d = f = \dots = m$, so haben wir:

$$(\nu : a) \cdot (\nu : c) \cdot (\nu : e) \dots = (\nu : m)^\nu;$$

oder:

$$m^\nu = a \cdot c \cdot e \dots,$$

oder:

$$m = \sqrt[\nu]{a \cdot c \cdot e \dots},$$

d. h.: Wenn auf einer Ebene eine Schaar von ν Geraden gegeben ist, so ist für jede Richtung der Ebene das Product der Abweichungen von diesen n Geraden gleich der ν^{ten} Potenz ihrer Abweichung von deren Mittelrichtung.

2. Bewegung eines auf der Geraden liegenden Punktes. — Die Kreislinie.

89. Wenn eine Gerade um einen auf ihr liegenden Punkt O sich dreht, so beschreibt jeder ihrer Punkte eine *Kreislinie*,

wenn die Drehung die Grösse eines geschlossenen Winkels erreicht; andernfalls nennt man den zurückgelegten Weg einen *Kreisbogen*. Dieses Gebilde ist durch *Anfangs-* und *Endstellung* des bewegten Punktes vollständig begrenzt, also eine *Grösse*. — Der *Kreisbogen* ist das dem *Winkel* entsprechende *Ausdehnungsgebilde*, wie der *Linientheil* das der *Strecke* entsprechende *Ausdehnungsgebilde* war.

Alle in dem Abschnitte über Winkel abgeleiteten Sätze lassen sich daher ohne Weiteres auf die *Kreisbogen* übertragen, wenn man statt der *Schenkel Punkte* auf derselben *Kreislinie*, statt der *Winkel Bogen* setzt.

In Bezug auf die *Kreislinie* heisst der feste Punkt *O* *Mittelpunkt* (*Centrum*), weil zu jedem Punkte *A* der *Kreislinie* ein anderer *A₁* gehört, welcher mit dem ersten durch die *Beziehung* verbunden ist:

$$\begin{aligned} (O - A) i^2 &= O - A_1; \text{ oder: } -(O - A) = O - A_1; \\ \text{oder: } A - O &= O - A_1; \\ \text{oder: } O &= \frac{A + A_1}{2}. \end{aligned}$$

Die bewegliche Strecke (*O — A*) heisst *Radius*, der Winkel, dessen *Schenkel* zwei *Radien* (*O — A*) und (*O — B*) sind, der also dem *Bogen* zwischen *A* und *B* entspricht: *Centriwinkel*.

Anm. Betrachtet man einen Punkt *A* der *Kreislinie* als fest, den *Mittelpunkt* als beweglich, so nähert sich die *Kreislinie*, wenn der *Mittelpunkt* sich ins Unendliche von *A* entfernt, einer *Geraden*, und, wenn der *Mittelpunkt* sich *A* bis ins Unendliche nähert, einem *Punkte*.

3. Bewegung einer auf der Geraden liegenden Strecke.

Jede auf der *Geraden* liegende Strecke *A — A₁* lässt sich darstellen als *Differenz* von zwei zu verschiedenen *Kreislinien* gehörigen *Radien*, da

$$A - A_1 = (O - A_1) - (O - A)$$

ist. Es genügt also, die *Bewegung* des *Radius* zu betrachten.

Hat ein *Radius* (*O — A*) durch *Drehung* um einen Winkel *i^m* die *Richtung* (*O — B*) erreicht, so setzen wir folgerecht:

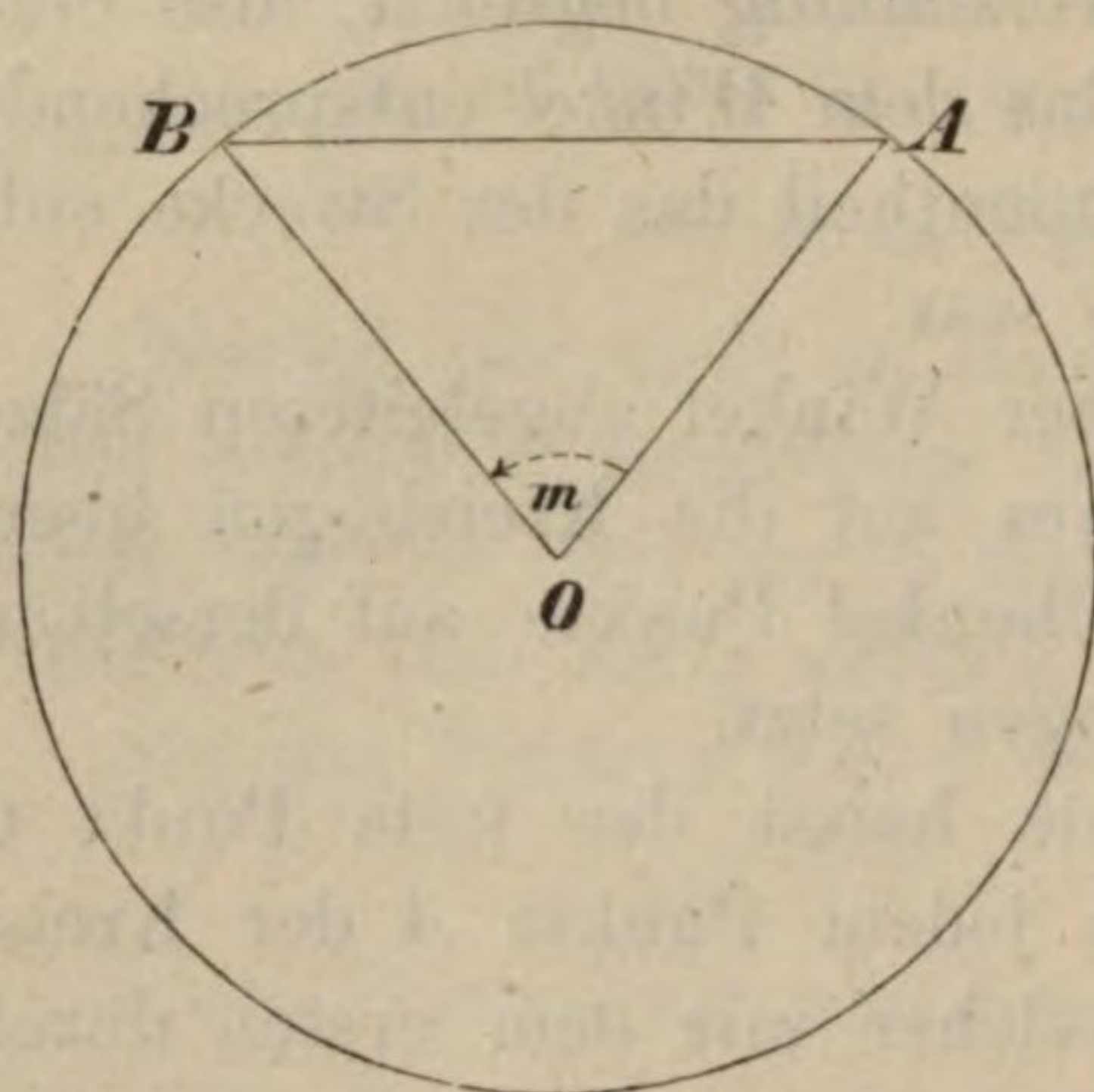
$$(O - A) i^m = (O - B).$$

Hieraus folgt:

$$(O - B) : (O - A) = i^m;$$

d. h.: ein Bogen ist durch seine *Endpunkte* (A, B) und durch den zugehörigen *Mittelpunkt* genau bestimmt.

91. Die Verbindungsstrecke der beiden Punkte A und B ($A - B$) heisst *Sehne* des Bogens und, wenn sie durch den Mittelpunkt geht, *Durchmesser*.



Das Dreieck der Punkte A, B, O heisst *gleichschenkelig*, ($A - B$) seine *Basis*, ($O - A$) und ($O - B$) seine *Schenkel*; der Eckpunkt O seine *Spitze*.

Da

$$(A - B) = (O - B) - (O - A),$$

so ist:

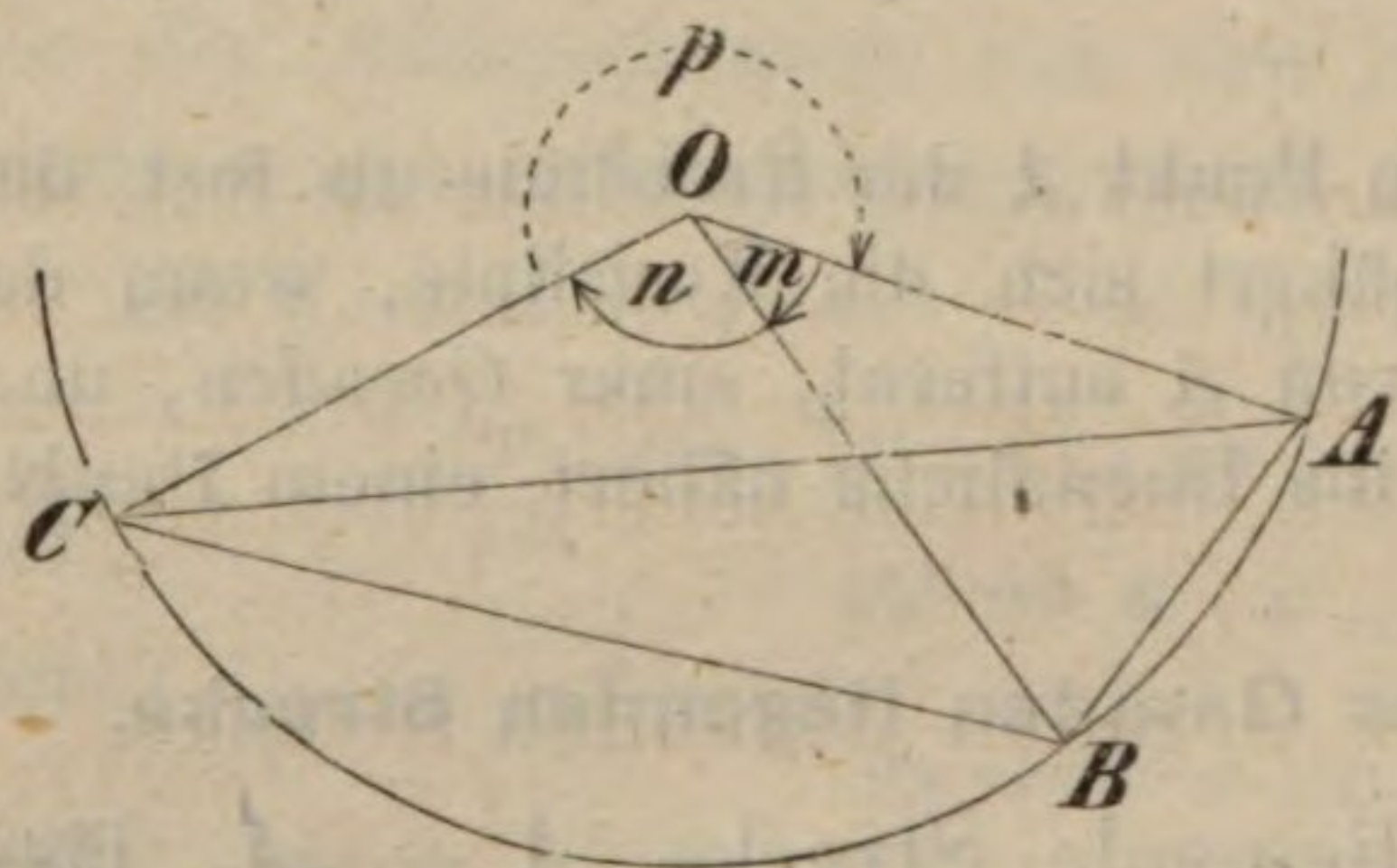
$$(A - B) = (O - B) (1 - i^{-m})$$

und

$$(B - A) = (O - A) (1 - i^m).$$

Diese Formeln zeigen den Zusammenhang zwischen Sehne, Bogen und Radius.

Hat ein Radius ($O - A$) durch Drehung um den Winkel i^m die Richtung ($O - B$) und dann durch Drehung um den Winkel i^n die Richtung ($O - C$) erreicht, so ist:



$$(O - A) i^m = (O - B);$$

$$(O - B) i^n = (O - C);$$

folglich:

$$(O - A) i^{m+n} = (O - C).$$

Und, wenn

$$m + n + p = 4,$$

so ist:

$$(O - C) i^p = (O - A).$$

Ferner erhalten wir für die drei ein Dreieck bildenden Sehnen ($A - B$), ($B - C$), ($C - A$) folgende Werthe:

$$(A - B) = (O - B) - (O - A) = (O - B) (1 - i^{-m})$$

$$(B - C) = (O - C) - (O - B) = (O - B) (i^n - 1)$$

$$(C - A) = (O - A) - (O - C) = (O - B) (i^{-m} - i^n),$$

oder, wenn wir diese drei Formeln durcheinander dividiren, wobei auf der rechten Seite ($O - B$) wegfällt:

$$\frac{A-B}{B-C} = \frac{1-i^{-m}}{i^n-1} = \frac{i^m-1}{i^{-p}-i^m} = \frac{i^{-n}-i^p}{1-i^{-n}}.$$

$$\frac{B-C}{C-A} = \frac{i^n-1}{i^{-m}-i^n} = \frac{i^{-p}-i^m}{1-i^{-p}} = \frac{i^p-1}{i^p-1}.$$

Diese Formeln bezeichnen den Zusammenhang zwischen den Seiten des Dreiecks und den denselben entsprechenden Centriwinkeln.

Statt

92.

$$(B-C):(C-A) = (i^n-1):(i^{-m}-i^n)$$

kann man schreiben:

$$(B-C)i^{-m} - (B-C)i^n = (C-A)i^n - (C-A);$$

oder:

$$(B-C)i^{-m} - [(B-C) + (C-A)]i^n + (C-A) = 0;$$

oder:

$$(B-C)i^{-m} + (A-B)i^n + (C-A) = 0,$$

d. h.: *Dreht man zwei Seiten des Dreiecks in entgegengesetzter Richtung, jede um den Centriwinkel der anderen, so entsteht ein neues Dreieck, dessen Seiten von gleicher Länge mit denen des ursprünglichen sind.*

Geht der Punkt B durch diese Drehung in B_1 über, so ist:

$$(B_1-C) = (B-C)i^{-m}$$

$$(A-B_1) = (A-B)i^n.$$

Und:

$$\frac{(A-B_1)i^{-n}}{(B_1-C)i^m} = \frac{1-i^{-m}}{i^n-1}$$

$$\frac{(B_1-C)i^m}{(C-A)} = \frac{i^n-1}{i^{-m}-i^n}$$

oder:

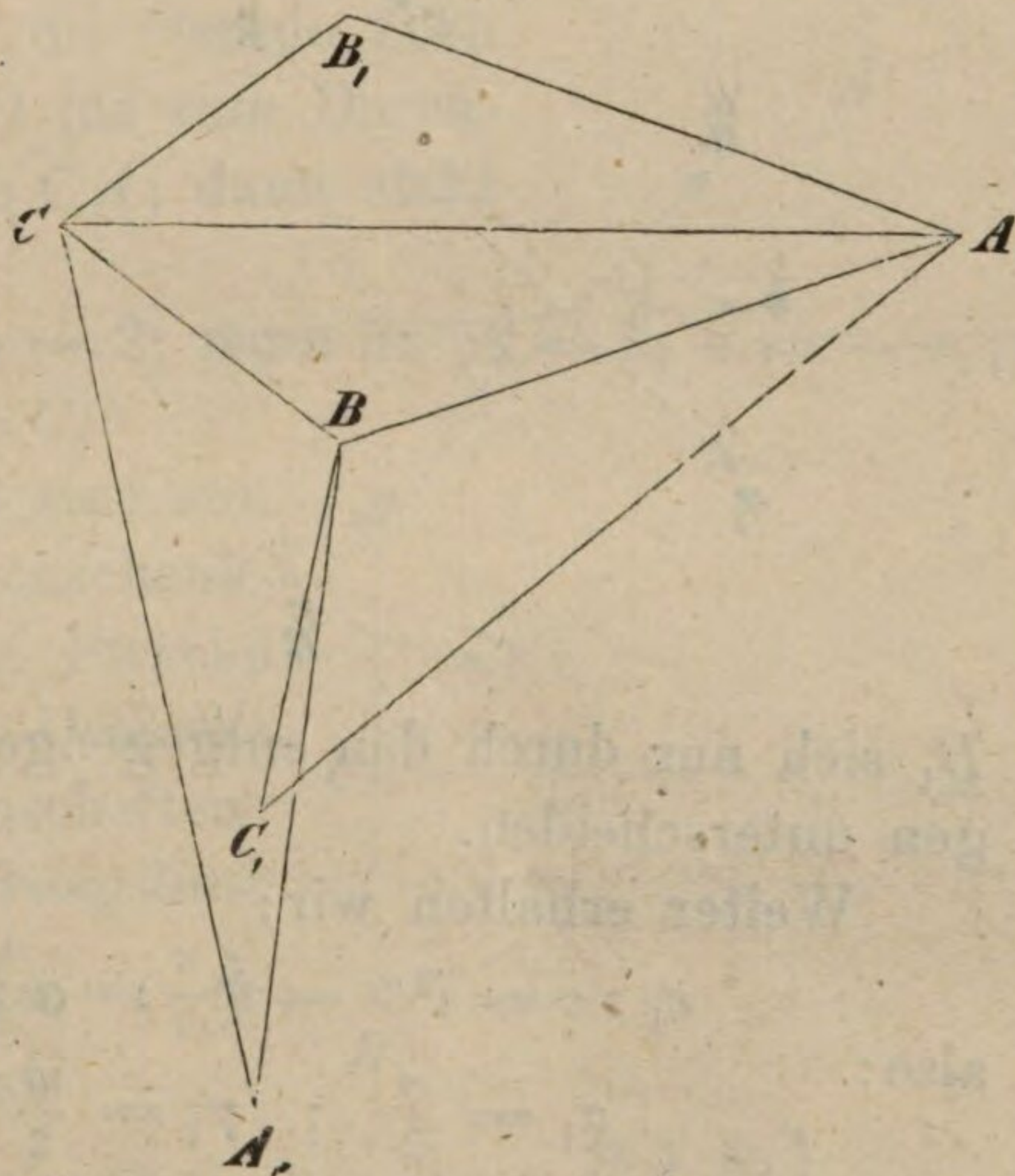
$$\frac{A-B_1}{B_1-C} = \frac{i^n-i^{n-m}}{i^{n-m}-i^{-m}}$$

$$\frac{B_1-C}{C-A} = \frac{i^{n-m}-i^{-m}}{i^{-m}-i^n}$$

oder, durch Multiplication mit $-i^{m-n}$:

$$\frac{A-B_1}{B_1-C} = \frac{1-i^m}{i^{-n}-1}$$

$$\frac{B_1-C}{C-A} = \frac{i^m-i^{-n}}{i^m-i^{-n}}$$



Das zweite Dreieck unterscheidet sich also vom ersten nur durch den entgegengesetzten Sinn von m und n ; oder

die beiden Dreiecke, von entgegengesetzten Seiten der Ebene betrachtet, sind gleich. Solche Dreiecke heissen *symmetrisch*.

Anm. *Construction* eines symmetrischen Dreiecks mittelst des Zirkels.

Bei der eben beschriebenen Drehung blieb $(C - A)$ in Ruhe; multipliciren wir aber die Drehungsformel mit i^m und mit i^{-n} , so entstehen zwei andere Drehungsformeln, bei deren Anwendung die beiden anderen Strecken in Ruhe bleiben. Diese Formeln sind:

$$(B - C) + (A - B)i^{-p} + (C - A)i^m = 0,$$

$$(B - C)i^p + (A - B) + (C - A)i^{-n} = 0.$$

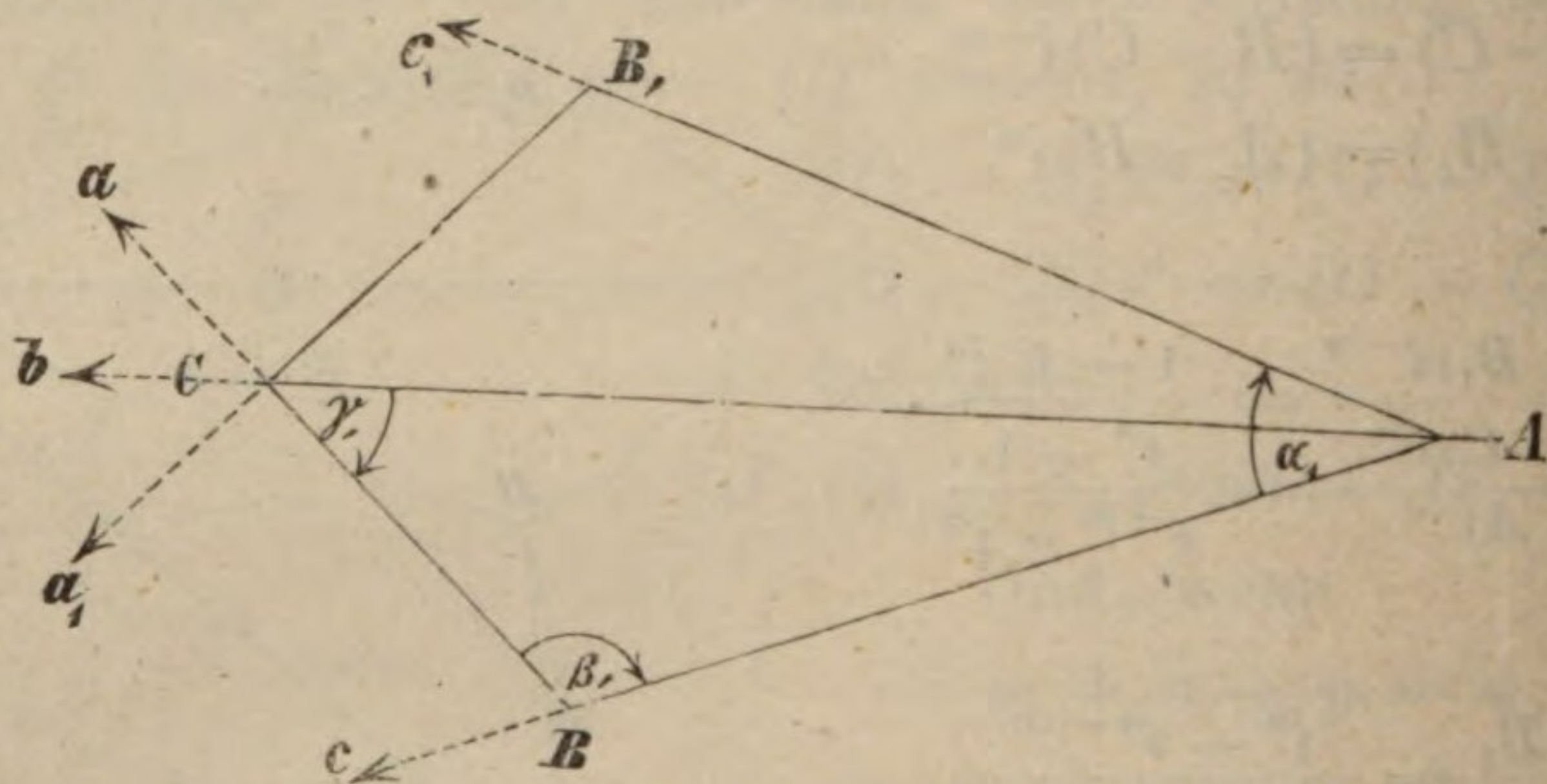
93. Seien $a, (-b), c$ die Geraden, auf denen resp. die Strecken $(B - C), (C - A), (A - B)$ liegen, und a_1, c_1 die Geraden, auf denen bei der erstbezeichneten Drehung des Dreiecks die Strecken $(B_1 - C), (A - B_1)$ liegen; sei ferner:

$$c : b = i^{-\alpha_1}; \quad a : b = i^{+\gamma_1}; \quad a : c = i^{2-\beta_1} = i^{+(\alpha_1 + \gamma_1)},$$

so ist:

$$c_1 : b = i^{+\alpha_1}; \quad a_1 : b = i^{-\gamma_1}; \quad a_1 : c_1 = i^{-(\alpha_1 + \gamma_1)}.$$

Diese Formeln zeigen, dass auch die Winkel bei B und



B_1 sich nur durch den entgegengesetzten Sinn ihrer Drehungen unterscheiden.

Weiter erhalten wir:

$$c_1 : c = i^{2\alpha_1} = i^n; \quad a : a_1 = i^{2\gamma_1} = i^m;$$

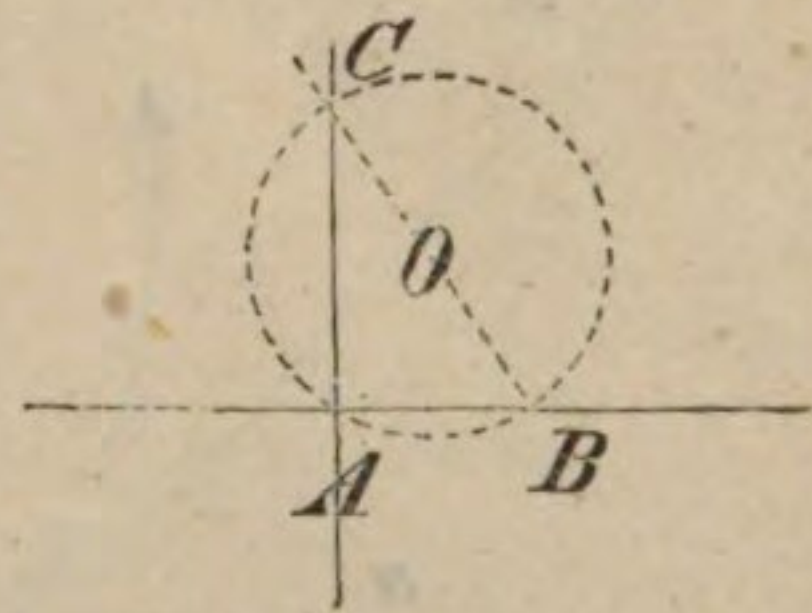
also:

$$\alpha_1 = \frac{n}{2}; \quad \gamma_1 = \frac{m}{2}; \quad \beta_1 = \frac{p}{2},$$

d. h.: die drei Winkel des ursprünglichen Dreiecks sind halb so gross, als die Centriwinkel, welche resp. denselben Seiten des Dreiecks gegenüberliegen.

Nennt man die Winkel des Dreiecks *Peripheriewinkel* (weil ihre Scheitel auf der Peripherie des Kreises liegen), welche zu den gegenüberliegenden Seiten (Sehnen und Bogen) gehören, so heisst der Satz: *Jeder Peripheriewinkel am Kreise ist halb so gross als der Centriwinkel, welcher zu demselben Bogen gehört.* — Daraus folgt: *Alle Peripheriewinkel eines Kreises, welche zu demselben, oder zu gleichen Bogen gehören, sind gleich.* — *Zwei Peripheriewinkel, welche zu Bogen gehören, die zusammen gleich der ganzen Kreislinie sind, betragen zusammen zwei Rechte.* — Die vier Schenkel dieser beiden Winkel, als Linientheile betrachtet, bilden ein Viereck, dessen Eckpunkte auf der Peripherie liegen (ein dem Kreise eingeschriebenes Viereck). Dieses Viereck hat also die Eigenschaft, dass je zwei gegenüberliegende seiner Innenwinkel zusammen zwei Rechte betragen. — *Der Peripheriewinkel, dessen Schenkel den Kreis in den Endpunkten eines Durchmessers treffen, ist ein Rechter.*

Dieser Satz dient zur Lösung der Aufgabe: In einem gegebenen Punkte A einer Geraden eine Senkrechte zu errichten. — Man wähle O beliebig ausserhalb der Geraden, beschreibe mit OA einen Kreis, der die Gerade noch in B schneidet, ziehe BO bis zum Durchschnittspunkt C , und ziehe CA ; dann steht CA senkrecht auf AB .



Specieller Fall. Sei $m = 2$; dann ist $\gamma_1 = 1$; $a = -a_1$; 94. und $(B_1 - C) = -(B - C)$.

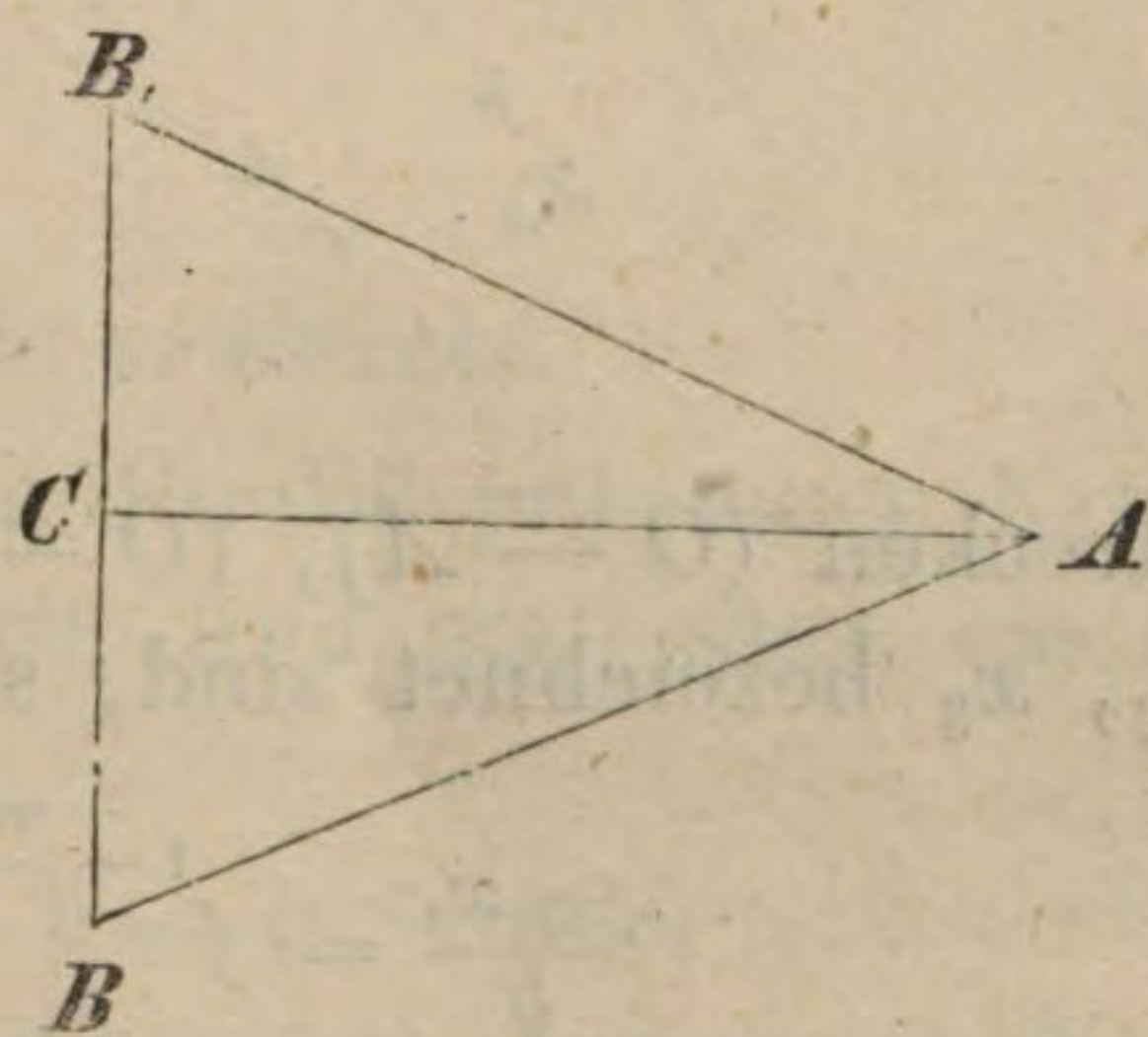
Die Punkte A, B_1, B sind nun die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks; und die Strecke $(C - A)$, welche *Höhe* des Dreiecks heisst, hat folgende Eigenschaften:

1) Sie ist die *Halbirungslinie* des Winkels an der Spitze ($\alpha_1 = \frac{n}{2}$).

2) Sie halbt die Basis.

$$\left[(B_1 - C) = -(B - C); \text{ also } C = \frac{B + B_1}{2} \right].$$

3) Sie bildet mit der Basis rechte Winkel. ($\gamma_1 = \frac{m}{2} = 1$).



Ausserdem ist $(a : c) = -(a_1 : c_1)$; d. h.: Die Winkel an der Basis des gleichschenkligen Dreiecks sind gleich gross und entgegengesetzt.

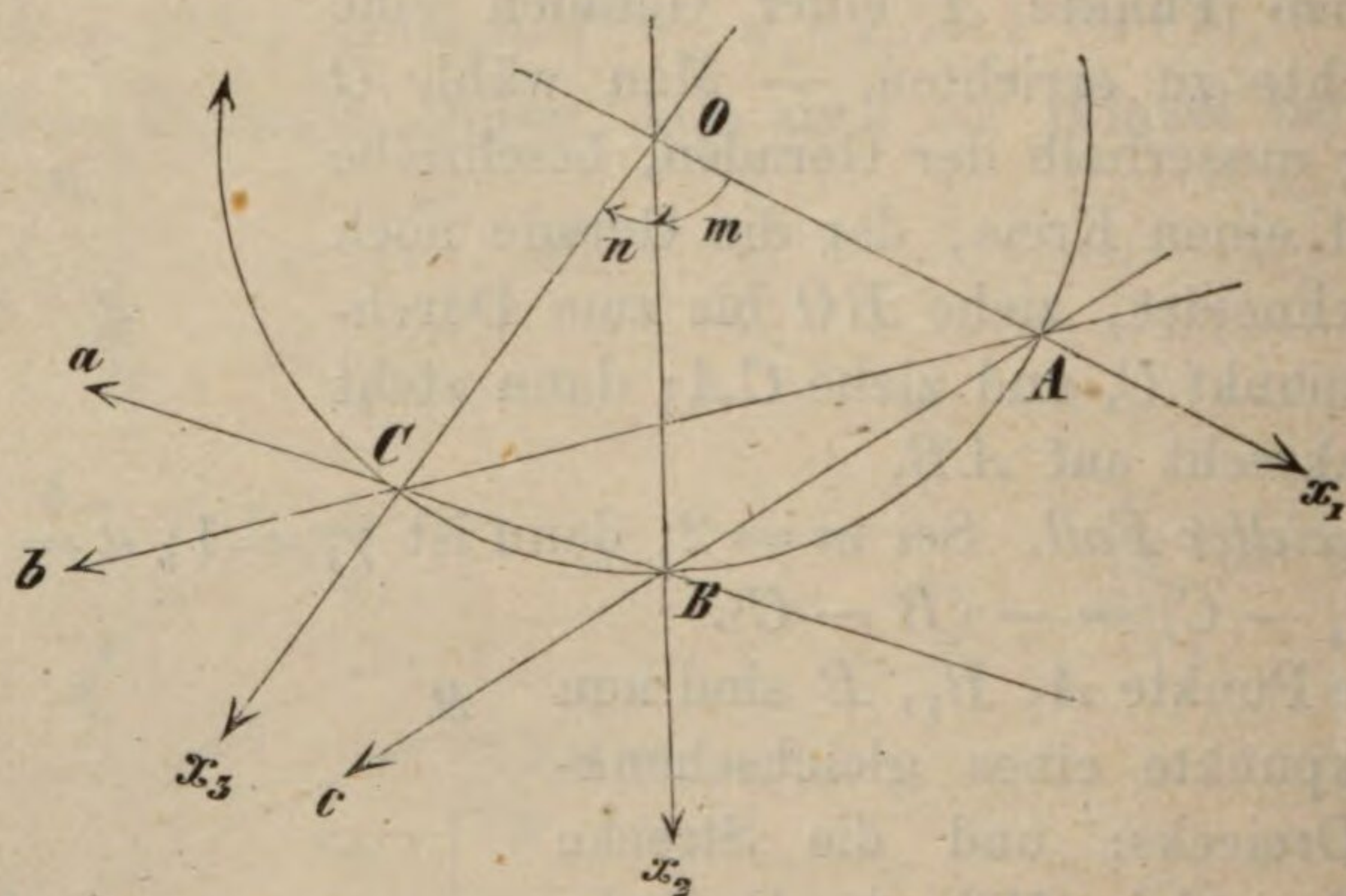
Aus $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2$ folgt in diesem Falle: $\alpha_1 + \beta_1 = 1$; also: $\beta_1 = 1 - \alpha_1$; und, da $\alpha_1 = \frac{n}{2}$ ist: $\beta_1 = 1 - \frac{n}{2}$; $n = 2 - 2\beta_1$.

Verbindet man in der Figur zu 93. die Punkte B und B_1 , so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Basis. Die Gerade b hat in beiden dieselben Eigenschaften.

Anm. Auf diese Eigenschaften der Geraden b gründen sich folgende Constructionen: 1) Halbierung einer Strecke ($B - B_1$). 2) Halbierung eines Winkels (m oder n). 3) Construction eines rechten Winkels, oder einer Normalen, wenn eine Gerade und a) ein Punkt auf derselben, b) ein Punkt ausserhalb derselben gegeben ist.

Anwendung der letzten Sätze auf das in 91. enthaltene gleichschenklige Dreieck.

95. Wenn die Geraden a, b, c dieselbe Bedeutung haben, wie in 93., und ausserdem in 91. die Geraden, auf denen die



Strecken $(O - A)$, $(O - B)$, $(O - C)$ liegen, resp. mit x_1 , x_2 , x_3 bezeichnet sind, so ist nach 94.:

$$\begin{aligned} \frac{-x_1}{b} &= i^{1-\frac{m+n}{2}}; & \frac{-x_1}{c} &= i^{1-\frac{m}{2}} \\ \frac{c}{x_2} &= i^{1-\frac{m}{2}}; & \frac{-x_2}{a} &= i^{1-\frac{n}{2}} \\ \frac{a}{x_3} &= i^{1-\frac{n}{2}}; & \frac{b}{x_3} &= i^{1-\frac{m+n}{2}}. \end{aligned}$$

Das Dreieck der Punkte A, B, C heisst: „dem Kreise einbeschrieben“; die in den Mitten seiner Seiten construirten Senkrechten schneiden sich im Mittelpunkte des Kreises.

Aus den letzten Formeln folgt noch z. B., dass

$$\frac{-x_1}{b} = \frac{b}{x_3}; \quad \text{oder: } b = \sqrt{-x_1 x_3};$$

d. h.: Im gleichschenkligen Dreieck halbirt eine durch die Spitze mit der Basis gezogene Parallele die Aussenwinkel an der Spitze.

Specieller Fall. Ist $a = c$, d. h. fallen diese Geraden 96. zusammen, so liegen A, B, C in derselben Geraden. Dann aber ist:

$$\frac{m+n}{2} = 0; \quad m = -n;$$

d. h. A und C fallen zusammen. Es können also drei Punkte nicht gleichzeitig auf einer Geraden und einer Kreislinie liegen. Eine Gerade, welche zwei Punkte mit einer Kreislinie gemeinsam hat, heisst *Secante*.

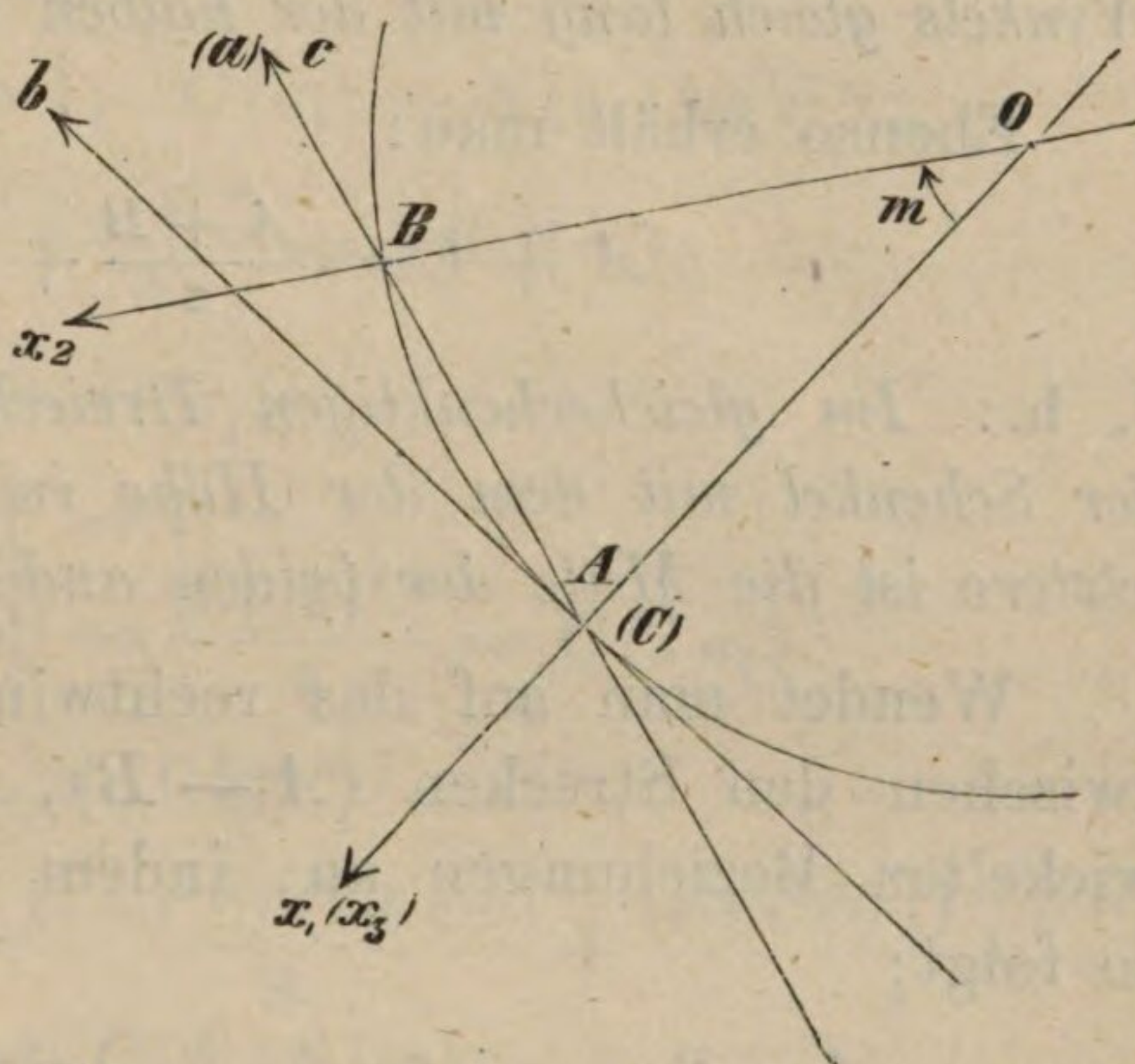
Ferner erhalten wir: x_2
 $x_1 = x_3$, und:

$$b \cdot i = -x_1;$$

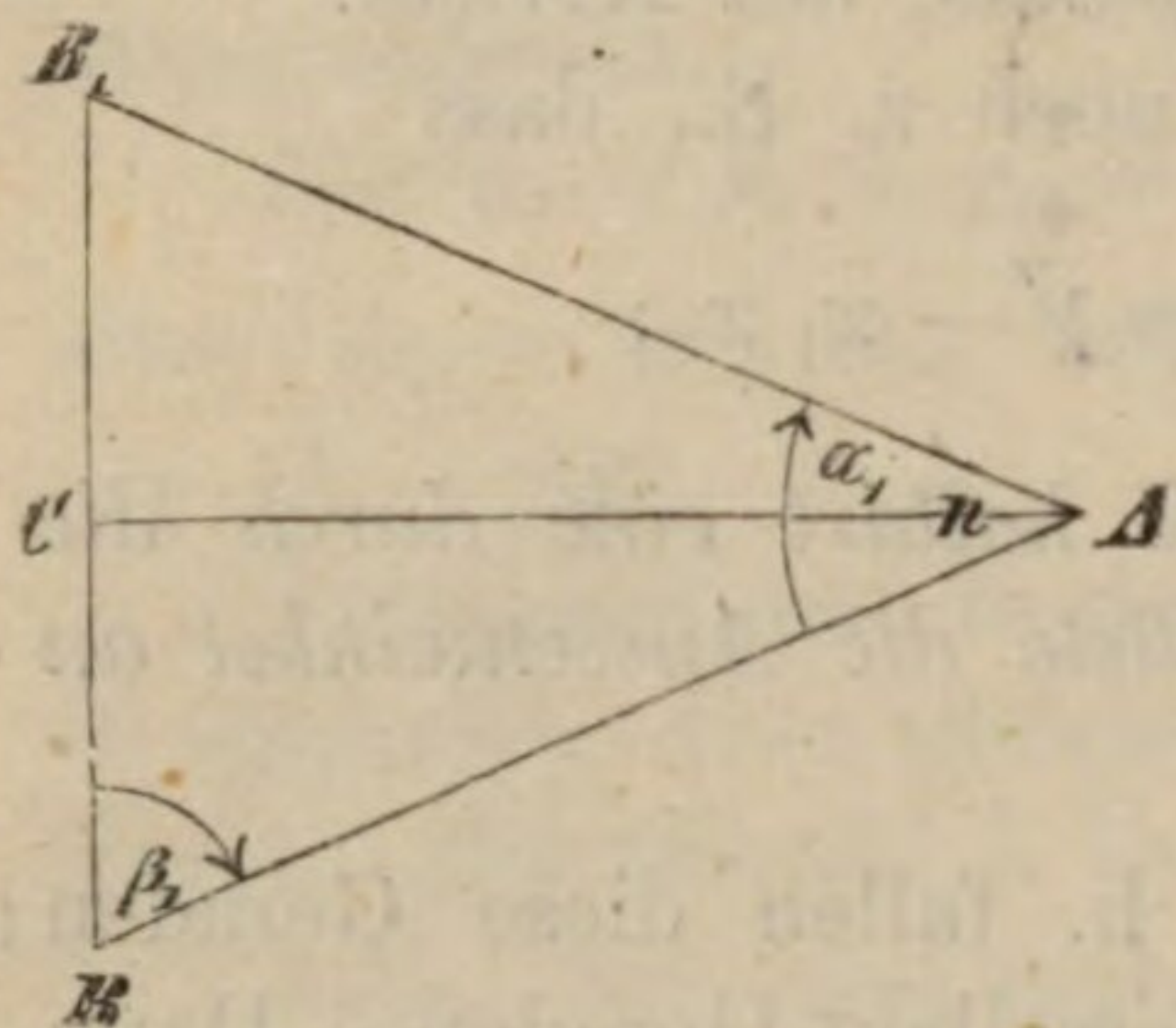
d. h.: Fallen die beiden Durchschnittspunkte einer Geraden und eines Kreises in einen einzigen zusammen, so steht die Gerade auf dem durch den Durchschnittspunkt gezogenen Radius senkrecht.

Eine Gerade, welche nur einen Punkt mit einer Kreislinie gemeinsam hat, heisst *Tangente*, und man sagt, sie berühre die Kreislinie.

Auch in diesem Falle ist noch $c:b = i^{-\alpha_1}$, oder $a:b = i^{+\alpha_1}$; d. h.: Der Winkel zwischen einer Tangente und einer durch denselben Punkt gehenden Secante ist dem Peripheriewinkel gleich, welcher zu dem von der Secante abgeschnittenen Bogen gehört.



97. In dem unter 94. betrachteten speciellen Falle war in dem Dreieck der Punkte A, B_1, C ein Winkel ein *rechter*.



Das Dreieck selbst heisst *rechtwinklig*, die Strecke $(A - B_1)$ *Hypotenuse*, die beiden Strecken $(B - C)$ $(C - A)$, (welche auf den Schenkeln des rechten Winkels liegen): *Katheten*.

$$\text{Aus } C = \frac{B + B_1}{2} \text{ folgt:}$$

$$(A - C) = \frac{1}{2}(A - B) + \frac{1}{2}(A - B_1);$$

d. h.: Im gleichschenkligen Dreieck ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte eines Schenkels und der Basis dem andern Schenkel parallel, und gleich lang mit der Hälfte des Schenkels; oder: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Verbindungslinie der Mitte der Hypotenuse mit dem Scheitel des rechten Winkels gleich lang mit der halben Hypotenuse.

Ebenso erhält man:

$$A + C = \frac{A + B}{2} + \frac{A + B_1}{2};$$

d. h.: Im gleichschenkligen Dreieck liegen die Mittelpunkte der Schenkel mit dem der Höhe in gerader Linie, und der letztere ist die Mitte der beiden anderen.

Wendet man auf das rechtwinklige Dreieck die in 91. zwischen den Strecken $(A - B)$, $(B - C)$, $(C - A)$ entwickelten Beziehungen an, indem man darin $m = 2$ setzt, so folgt:

$$\frac{A - B}{B - C} = \frac{2}{i^n - 1} = \frac{-2}{i^{-p} + 1} = \frac{i^{-n} - i^p}{1 - i^{-n}}.$$

$$\frac{B - C}{C - A} = \frac{i^n - 1}{-1 - i^n} = \frac{i^{-p} + 1}{1 - i^{-p}} = \frac{1 - i^{-n}}{i^p - 1}.$$

Die letzten beiden Werthe des Verhältnisses verwandeln sich in den vorhergehenden, wenn man für p seinen Werth $(2 - n)$ setzt.

Die erste Doppelgleichung aber lässt sich in folgende Partialgleichungen zerlegen, wenn man $2\alpha_1$ für n setzt:

$$\frac{B - C}{B - A} = \frac{1 - i^{2\alpha_1}}{2} ; \quad \frac{A - C}{A - B} = \frac{1 + i^{2\alpha_1}}{2} ; \quad \frac{B - C}{C - A} = \frac{1 - i^{2\alpha_1}}{1 + i^{2\alpha_1}}.$$

Wir bezeichnen nun zur Abkürzung diese drei Verhältnisse der Reihe nach mit $S(\alpha_1)$; $C(\alpha_1)$; $T(\alpha_1)$, sodass:

$$S(\alpha_1) = \frac{1 - i^2 \alpha_1}{2}; \quad C(\alpha_1) = \frac{1 + i^2 \alpha_1}{2}; \quad T(\alpha_1) = \frac{1 - i^2 \alpha_1}{1 + i^2 \alpha_1} = \frac{S(\alpha_1)}{C(\alpha_1)}$$

ist.

Anm. Die Wahl der Buchstaben S , C , T gründet sich auf folgenden Umstand: Ersetzt man die Strecken $(B - C)$, $(B - A)$, $(A - C)$ durch ihre numerischen Werthe, so verwandeln sich die drei Verhältnisse resp. in Sinus, Cosinus, Tangens der Zahl α_1 . Ebenso sind $\sin \alpha_1$, $\cos \alpha_1$, $\operatorname{tg} \alpha_1$ resp. die numerischen Werthe von $S(\alpha_1)$, $C(\alpha_1)$, $T(\alpha_1)$; d. h. es ist $\sin \alpha_1 = \sqrt{S(\alpha_1)^2}$; $\cos \alpha_1 = \sqrt{C(\alpha_1)^2}$; $\operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{T(\alpha_1)^2}$; und aus $S(\alpha_1) + C(\alpha_1) = 1$ folgt durch innere Quadrirung:

$$[S(\alpha_1) + C(\alpha_1)]^2 = 1; \quad \text{oder} \quad S(\alpha_1)^2 + C(\alpha_1)^2 = 1;$$

$$\text{oder} \quad \sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 = 1.$$

Andere Formeln bleiben ungeändert.

Zwischen den Grössen $S(\alpha_1)$, $C(\alpha_1)$, $T(\alpha_1)$ bestehen nun folgende Beziehungen:

$$S(\alpha_1) + C(\alpha_1) = 1; \quad C(\alpha_1) - S(\alpha_1) = i^2 \alpha_1;$$

$$S(\alpha_1) \cdot C(\alpha_1) = \frac{1 - i^4 \alpha_1}{4} = \frac{1}{2} S(2 \alpha_1);$$

oder:

$$S(2 \alpha_1) = 2 S(\alpha_1) \cdot C(\alpha_1);$$

$$[C(\alpha_1)]^2 - [S(\alpha_1)]^2 = i^2 \alpha_1;$$

$$[C(\alpha_1)]^2 + [S(\alpha_1)]^2 = \frac{2 + 2 i^4 \alpha_1}{4} = C(2 \alpha_1).$$

Setzen wir $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1$, so folgt:

$$\begin{aligned} S(\beta_1 + \gamma_1) &= \frac{1 - i^2 \beta_1 \cdot i^2 \gamma_1}{2} = \frac{(1 - i^2 \beta_1)(1 + i^2 \gamma_1)}{4} + \frac{(1 + i^2 \beta_1)(1 - i^2 \gamma_1)}{4} \\ &= S(\beta_1) C(\gamma_1) + C(\beta_1) S(\gamma_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(\beta_1 + \gamma_1) &= \frac{1 + i^2 \beta_1 \cdot i^2 \gamma_1}{2} = \frac{(1 + i^2 \beta_1)(1 + i^2 \gamma_1)}{4} + \frac{(1 - i^2 \beta_1)(1 - i^2 \gamma_1)}{4} \\ &= C(\beta_1) C(\gamma_1) + S(\beta_1) S(\gamma_1). \end{aligned}$$

Setzt man $\alpha_1 = -\delta_1$, so folgt:

$$C(-\delta_1) = \frac{1 + i^{-2} \delta_1}{2} = \frac{i^2 \delta_1 + 1}{2 \cdot i^2 \delta_1} = i^{-2} \delta_1 \cdot C(\delta_1);$$

$$S(-\delta_1) = \frac{1 - i^{-2} \delta_1}{2} = \frac{i^2 \delta_1 - 1}{2 \cdot i^2 \delta_1} = (-i^{-2} \delta_1) \cdot S(\delta_1).$$

Ferner ist für

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_1 = & 1. & 2. & 3. & 4. & \frac{1}{2}. & \frac{3}{2}. & \frac{5}{2}. & \frac{7}{2}. \\ C(\alpha_1) = & 0. & 1. & 0. & 1. & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2}. \\ S(\alpha_1) = & 1. & 0. & 1. & 0. & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2}. \end{array}$$

Wenn, wie oben, $n + p = 2$, also $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, oder $\beta_1 - \delta_1 = 1$ ist, so ist $\beta_1 = 1 + \delta_1$; $i^2 \beta_1 = i^2 \cdot i^2 \delta_1 = -i^2 \delta_1$; folglich:

$$\begin{array}{l} S(\beta_1) = C(\delta_1) \quad ; \quad C(\beta_1) = S(\delta_1); \\ \text{ferner:} \quad 2 S(\beta_1) C(\beta_1) = 2 S(\delta_1) C(\delta_1); \\ \text{oder:} \quad S(2\beta_1) = S(2\delta_1); \\ \text{daher auch:} \quad C(2\beta_1) = C(2\delta_1). *) \end{array}$$

Die Formeln in 92. lassen sich nun schreiben:

$$\frac{A - B_1}{C - B_1} = \frac{S\left(\frac{m}{2}\right)}{S\left(-\frac{n}{2}\right)}, \quad \frac{B_1 - C}{A - C} = \frac{S\left(\frac{n}{2}\right)}{S\left(-\frac{p}{2}\right)}, \quad \frac{C - A}{B_1 - A} = \frac{S\left(\frac{p}{2}\right)}{S\left(-\frac{m}{2}\right)}.$$

*) Der Unterschied zwischen den Ausdrücken $S(\alpha_1)$, $C(\alpha_1)$ und den entsprechenden trigonometrischen Functionen verdeutlicht sich auch geometrisch durch folgende Betrachtung. Wenn $\alpha_1 \cdot \frac{\pi}{2} = \alpha$, so ist

$$\begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} = \frac{i^{\alpha_1} + i^{-\alpha_1}}{2} = \frac{1 + i^{2\alpha_1}}{2 i^{\alpha_1}} \\ \text{und} \\ \sin \alpha = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2 i} = \frac{i^{\alpha_1} - i^{-\alpha_1}}{2 i} = \frac{1 - i^{2\alpha_1}}{-2 i^{\alpha_1} + 1} = \frac{1 - i^{2\alpha_1}}{2 i^{\alpha_1}} \cdot i. \end{array}$$

Demnach ist $\cos \alpha = \frac{C(\alpha_1)}{i^{\alpha_1}}$, und $\sin \alpha = \frac{i \cdot S(\alpha_1)}{i^{\alpha_1}}$; oder:

$$\frac{(A - C) i^{-\alpha_1}}{(A - B)} = \cos \alpha; \quad \frac{i (B - C) i^{-\alpha_1}}{(B - A)} = \sin \alpha.$$

D. h.: Weil der Quotient zweier Strecken nur dann eine Zahl ist, wenn dieselben gleich gerichtet sind, so muss man, um $\cos \alpha$ zu erhalten, die Strecke $(A - C)$ durch Drehung um den Winkel $(-\alpha_1)$ in die Richtung von $(A - B)$ bringen; ebenso muss man, um $\sin \alpha$ zu erhalten, die Strecke $(B - C)$ durch zwei Drehungen, um den Winkel $(-\alpha_1)$ und um einen Rechten, in die Richtung von $(B - A)$ bringen. Es sind also $S(\alpha_1)$ und $C(\alpha_1)$ die Quotienten der betreffenden *Strecken* (mit Festhaltung ihrer Richtung); und $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ diejenigen ihrer *numerischen Werthe*. Durch die oben gegebenen Beziehungen zwischen $C(\alpha_1)$ und $\cos \alpha$, sowie zwischen $S(\alpha_1)$ und $\sin \alpha$ lassen sich nun alle Formeln der einen Kategorie in die der andern verwandeln.

Gehen von einem Punkte C innerhalb oder ausserhalb eines Kreises zwei Secanten nach der Kreislinie, welche dieselbe in den Punkten A und B_1 , resp. B und A_1 schneiden, so sind in den Dreiecken $(C A B)$ und $(C A_1 B_1)$ die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Winkel $(\gamma \alpha \beta)$ gleich. Folglich hat man:

$$\frac{B - A}{C - A} = \frac{S(\gamma)}{S(-\beta)};$$

$$\frac{C - B}{A - B} = \frac{S(\alpha)}{S(-\gamma)};$$

$$\frac{A - C}{B - C} = \frac{S(\beta)}{S(-\alpha)};$$

oder:

$$\frac{B - A}{A - C} = i^{2\beta} \cdot \frac{S(\gamma)}{S(\beta)};$$

$$\frac{C - B}{B - A} = i^{2\gamma} \cdot \frac{S(\alpha)}{S(\gamma)};$$

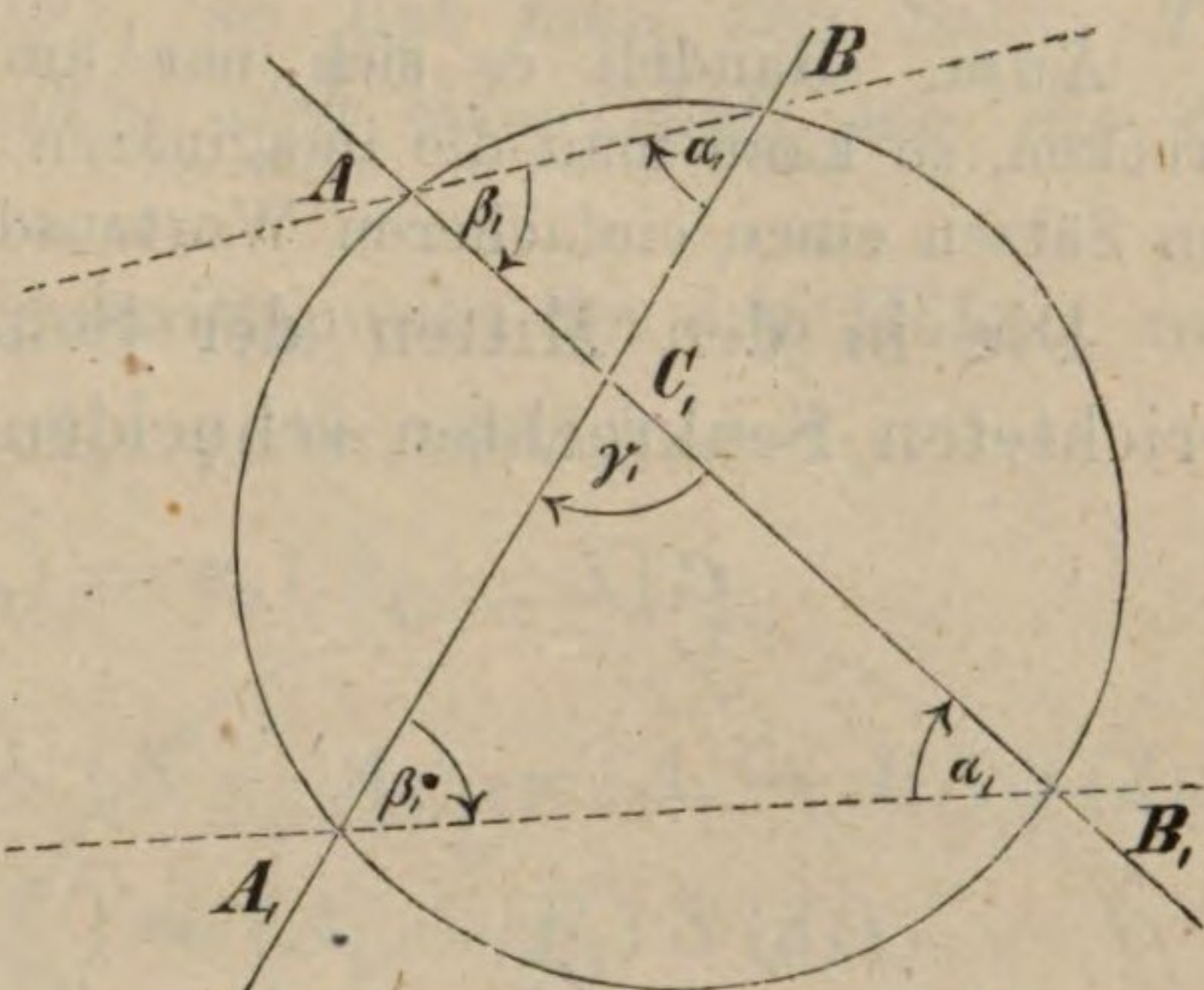
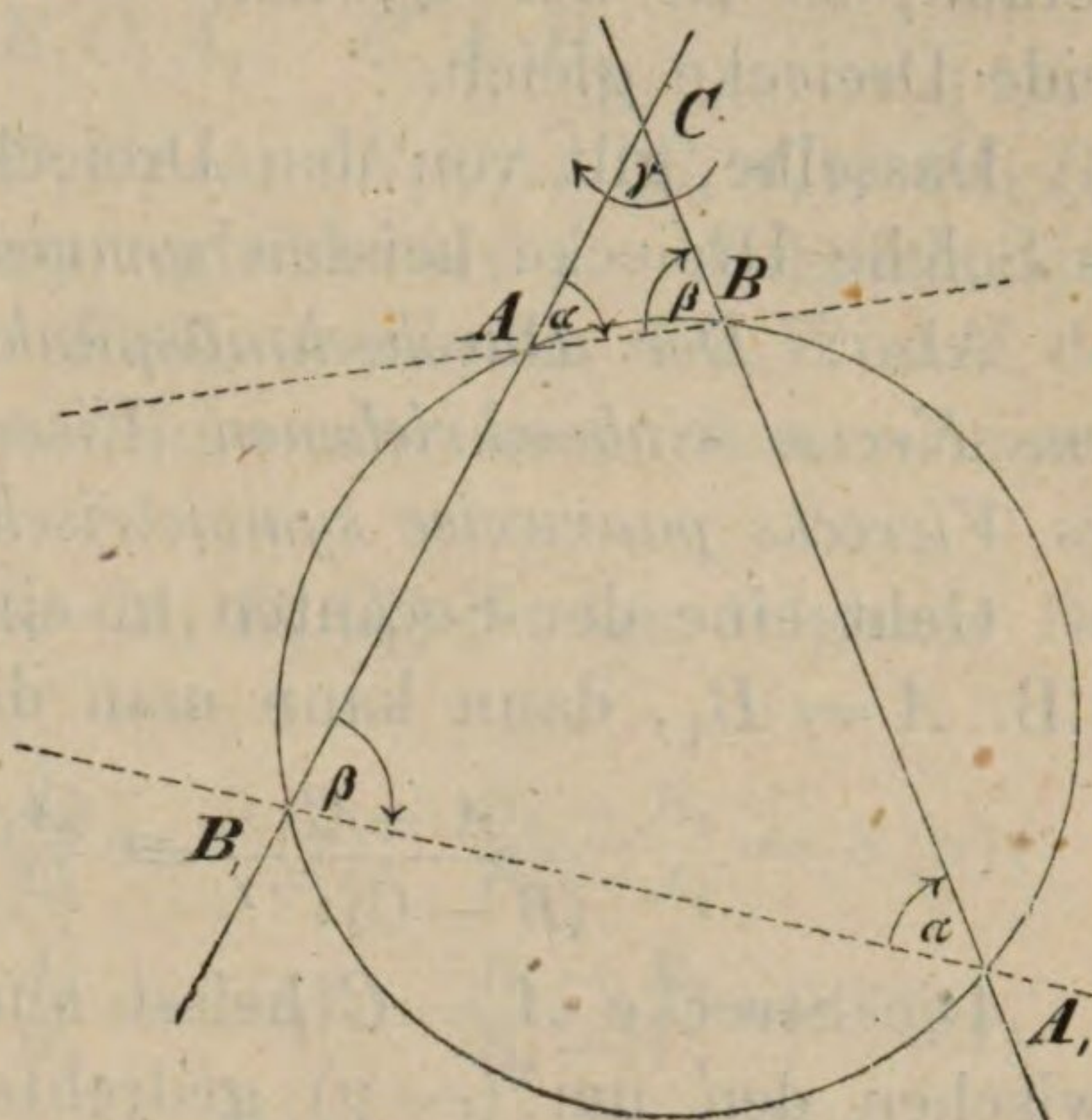
$$\frac{A - C}{C - B} = i^{2\alpha} \cdot \frac{S(\beta)}{S(\alpha)}.$$

Ferner erhält man drei richtige Formeln, wenn man hierin A_1 und B_1 statt A und B , und $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ statt α , β , γ setzt. Beide Reihen combinirt aber geben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{B - A}{A - C} &= i^{-2\alpha} \cdot \frac{B_1 - A_1}{A_1 - C} \\ \frac{C - B}{B - A} &= i^{-2\beta} \cdot \frac{C - B_1}{B_1 - A_1} \\ \frac{A - C}{C - B} &= i^{-2\gamma} \cdot \frac{A_1 - C}{C - B_1} \end{aligned} \right\}.$$

oder auch:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{(B - A) i^\alpha}{C - A} &= \frac{(B_1 - A_1) i^{-\alpha}}{C - A_1} \\ \frac{(C - B) i^\beta}{A - B} &= \frac{(C - B_1) i^{-\beta}}{A_1 - B_1} \\ \frac{(A - C) i^\gamma}{B - C} &= \frac{(A_1 - C) i^{-\gamma}}{B_1 - C} \end{aligned} \right.$$



d. h.: Bringt man in den Dreiecken $(A B C)$ und $(A_1 B_1 C)$ zwei Paare entsprechender Seiten durch Drehung in je eine Gerade, so ist der Quotient der beiden Seitenstrecken für beide Dreiecke gleich.

Dasselbe gilt von den Dreiecken $(C A A_1)$ und $(C B B_1)$.
— Solche Dreiecke heissen *symmetrisch ähnlich*.

Also: *Der Durchschnittspunkt zweier Gegenseiten eines dem Kreise einbeschriebenen Vierecks bildet mit den Ecken des Vierecks paarweise symmetrisch ähnliche Dreiecke.*

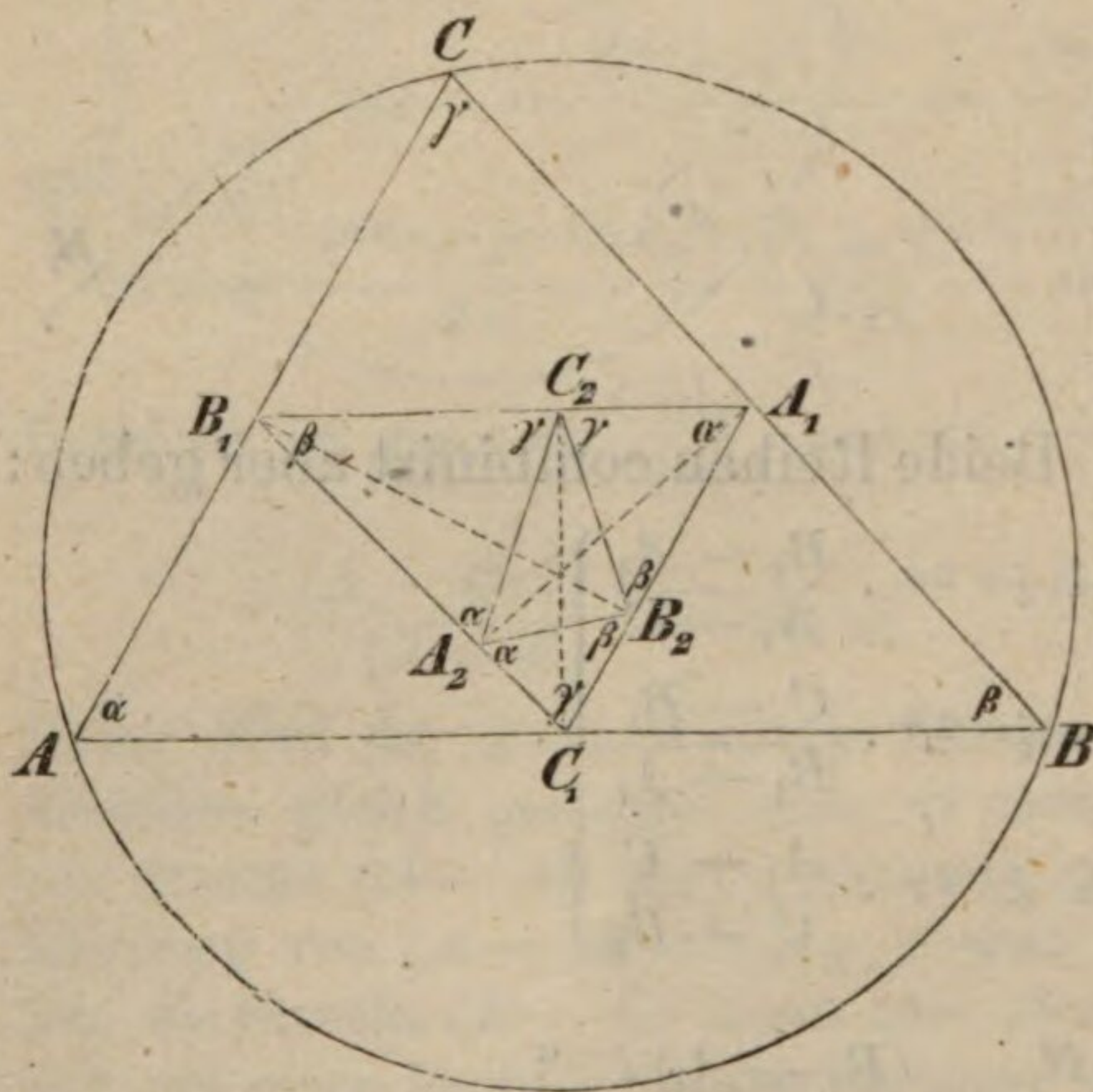
Geht eine der Secanten in eine Tangente über, d. h. ist z. B. $A = B_1$, dann kann man die letzte Formel schreiben:

$$\frac{A - C}{(B - C) i^{-\gamma}} = \frac{(A_1 - C) i^{-\gamma}}{A - C}.$$

Die Strecke $A - C$ heisst nun die *mittlere Proportionale* zwischen den um $(-\gamma)$ gedrehten Strecken $(B - C)$ und $(A_1 - C)$.

Anm. Handelt es sich nur um die numerischen Werthe der Strecken, so kann man die imaginären Factoren überall weglassen und den Sätzen einen einfacheren Wortausdruck geben.

100. Die in den Mitten der Seiten eines Dreiecks $(A B C)$ errichteten Senkrechten schneiden sich, wie wir oben sahen,



in einem Punkte. — Verbindet man nun die Fusspunkte dieser Senkrechten, so entsteht ein zweites Dreieck, $(A_1 B_1 C_1)$, in welchem jene Senkrechten aus den Ecken auf die Gegenseiten gefällt sind, und *Höhen* heissen. — Also schneiden sich auch die Höhen eines Dreiecks in demselben Punkte. — Verbindet man endlich die

Fusspunkte dieser Senkrechten, so entsteht ein drittes Dreieck $(A_2 B_2 C_2)$. Nun liegen auf der Peripherie eines Kreises die Punkte:

$$(A_1 A_2 B_1 B_2), \quad (B_1 B_2 C_1 C_2), \quad (C_1 C_2 A_1 A_2);$$

folglich sind symmetrisch ähnlich die Dreiecke:

$$\begin{aligned} & A_1 B_2 C_2, \quad B_1 C_2 A_2, \quad C_1 A_2 B_2, \\ \text{und} & A_1 B_1 C_1, \quad B_1 C_1 A_1, \quad C_1 A_1 B_1. \end{aligned}$$

Daher sind die in $A_2 B_2 C_2$ an $(B_1 C_1)$, $(C_1 A_1)$, $(A_1 B_1)$ liegenden Winkelpaare resp. gleich $\alpha \beta \gamma$. Folglich sind die obigen Senkrechten die *Halbirungslinien* der Winkel des Dreiecks $(A_2 B_2 C_2)$; also schneiden sich auch diese in einem Punkte.

Im Dreieck der Punkte $(A_1 B_1 C_1)$ finden folgende Beziehungen statt:

$$\begin{aligned} \frac{C_1 - C_2}{C_1 - B_1} &= S(\beta); & \frac{A_1 - A_2}{A_1 - C_1} &= S(\gamma); & \frac{B_1 - B_2}{B_1 - A_1} &= S(\alpha); \\ \frac{C_1 - C_2}{C_1 - A_1} &= S(\alpha); & \frac{A_1 - A_2}{A_1 - B_1} &= S(\beta); & \frac{B_1 - B_2}{B_1 - C_1} &= S(\gamma). \end{aligned}$$

Setzt man die Werthe für $S(\alpha)$ einander gleich, desgleichen für $S(\beta)$ und $S(\gamma)$, so hat man den Satz: *Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt, wie die zugehörigen Seiten.*

Sei ferner X der Durchschnittspunkt der drei Höhen, und
folglich: $X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$; $(\alpha_1 + \alpha_2) = 1$,
 $\alpha_1 (X - A_1) = \alpha_2 (A_2 - X)$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} (A_1 - A_2) &= (A_1 - X) + (X - A_2) = (A_1 - B_1) S(\beta); \\ \text{oder:} & (A_1 - X) \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = (A_1 - B_1) S(\beta); \\ \text{oder:} & (A_1 - X) = \alpha_2 S(\beta) (A_1 - B_1). \end{aligned}$$

Ferner, da

$$\begin{aligned} (A_1 - X) &= (A_1 - B_1) + (B_1 - X) \\ \text{ist:} & (B_1 - X) = (\alpha_2 S(\beta) - 1) (A_1 - B_1); \\ \text{endlich:} & (B_1 - X) = \frac{\alpha_2 S(\beta) - 1}{S(\alpha)} \cdot (B_2 - B_1). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2 S(\beta) - 1}{S(\alpha)} &= -\beta_2 \quad ; \quad \beta_1 + \beta_2 = 1; \\ \text{dann ist} & X = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2. \end{aligned}$$

Setzt man ferner $X = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2$, so erhält man durch eine ganz analoge Rechnung:

$$\frac{\gamma_2 S(\beta) - 1}{S(\gamma)} = -\beta_2;$$

also:

$$\alpha_2 S(\beta) + \beta_2 S(\alpha) = 1;$$

$$\beta_2 S(\gamma) + \gamma_2 S(\beta) = 1;$$

$$\gamma_2 S(\alpha) + \alpha_2 S(\gamma) = 1.$$

Vermöge dieser Gleichungen kann man die Grössen $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ und $S(\alpha)$, $S(\beta)$, $S(\gamma)$ beliebig durch einander ausdrücken. Man erhält:

$$S(\alpha) = \frac{\beta_2 + \gamma_2 - \alpha_2}{2 \beta_2 \gamma_2}; \quad \alpha_2 = \frac{S(\beta) + S(\gamma) - S(\alpha)}{2 S(\beta) S(\gamma)};$$

$$S(\beta) = \frac{\gamma_2 + \alpha_2 - \beta_2}{2 \gamma_2 \alpha_2}; \quad \beta_2 = \frac{S(\gamma) + S(\alpha) - S(\beta)}{2 S(\gamma) S(\alpha)};$$

$$S(\gamma) = \frac{\alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2}{2 \alpha_2 \beta_2}; \quad \gamma_2 = \frac{S(\alpha) + S(\beta) - S(\gamma)}{2 S(\alpha) S(\beta)}.$$

4. Bewegung eines auf der Geraden liegenden Linientheils. — Die Kreisfläche.

102. Wenn eine Gerade um einen auf ihr liegenden Punkt O sich dreht, so beschreibt ein von O ausgehender Linientheil eine *Kreisfläche*, wenn die Drehung die Grösse eines geschlossenen Winkels erreicht; andernfalls nennt man den zurückgelegten Weg einen *Kreisausschnitt*. Dieses Gebilde ist durch *Anfangs-* und *Endstellung* des bewegten Linientheils, und durch den von dessen Endpunkte beschriebenen Bogen vollständig begrenzt, also eine *Grösse*. — Der Kreisausschnitt kann, wie der Kreisbogen, als ein dem Winkel entsprechendes *Ausdehnungsgebilde* angesehen werden.

Alle in dem Abschnitte über Winkel abgeleiteten Sätze lassen sich unmittelbar auf den Kreisausschnitt übertragen, wenn man statt der Schenkel Linientheile, von dem Drehungspunkte ausgehend, und statt der Winkel Kreisausschnitte setzt.

Betrachtet man die *Kreisfläche* nicht als Mass für die Drehung des Linientheils, sondern als *Theil der Ebene*, so ist sie auf der Ebene dasselbe, was der Linientheil auf der Geraden ist. Sie bestimmt die *Seite* der Ebene, ist ein Theil von ihr, und entsteht durch Drehung des Linientheils, wie dieser durch Schiebung des Punktes.

5. Drehung um einen *ausserhalb* der Geraden liegenden Punkt.

1. Bewegung einer Geraden.

Wenn auf dem Umfange einer Kreislinie ein Punkt *nebst* 103. der zugehörigen Tangente gegeben ist, und, während der Punkt auf der Kreislinie fortschreitet, die Gerade sich so bewegt, dass sie stets die zu dem Punkte gehörige Tangente bleibt, so sagt man, die Gerade drehe sich um das Centrum des Kreises.

Ist die Gerade bei dieser Bewegung in die ursprüngliche Richtung zurückgekehrt, was der Fall ist, wenn der Punkt die ganze Kreislinie beschrieben hat, so hat sie selbst die ganze Ebene beschrieben, mit Ausnahme der Kreisfläche. Man sagt daher, dass die Gerade (in ihren verschiedenen Richtungen) die Kreisfläche *umhülle*.

Da die Gerade in jeder ihrer Richtungen einen Punkt mit der Kreislinie gemeinsam hat, so kann sie ebenso, wie der Punkt, für die Kreislinie als *erzeugendes Gebilde* angesehen werden.

Anm. Betrachtet man einen Punkt *A* der Kreislinie als fest, den Mittelpunkt als beweglich, so nähert sich auch bei dieser Entstehungsweise die Kreislinie, wenn der Mittelpunkt sich ins Unendliche von *A* entfernt, einer *Geraden*, nämlich der Tangente in *A*, und, wenn der Mittelpunkt sich *A* bis ins Unendliche nähert, einem *Punkte*, nämlich dem Durchschnittspunkte aller durch *A* möglichen Geraden.

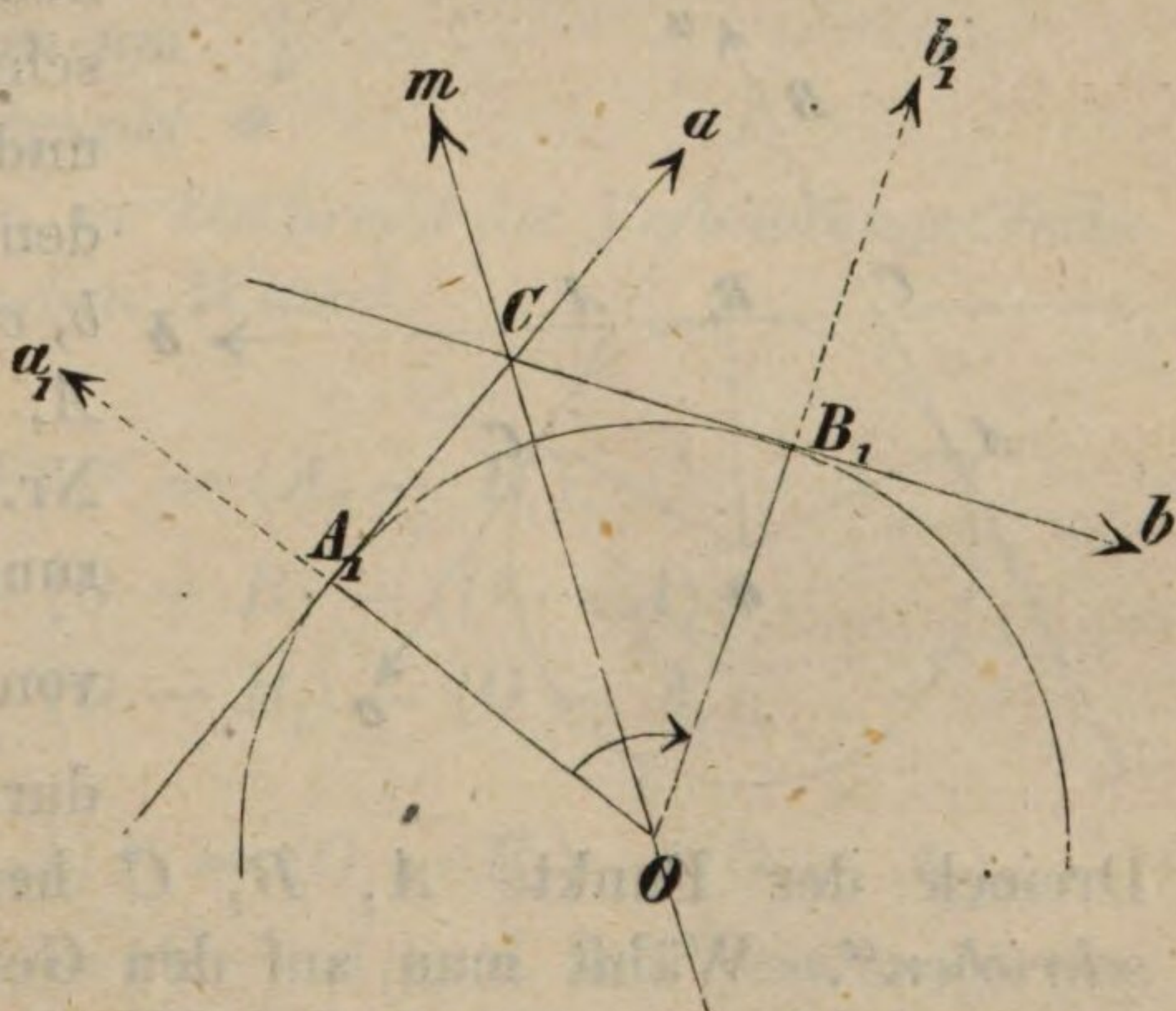
Wenn eine Gerade *a* durch Drehung um einen Punkt *O* 104.

in die Richtung *b* gekommen ist, so seien die Berührungspunkte von *a* und *b* mit der Kreislinie resp. durch *A*₁ und *B*₁ bezeichnet, und die Geraden, auf denen die Strecken (*O—A*₁) und (*O—B*₁) liegen, resp. durch *a*₁ und *b*₁. Man hat dann:

$$a_1 \cdot i = a;$$

$$b_1 \cdot i = b.$$

Da nun $a_1 : a = b_1 : b$, so ist, wie schon bekannt:



$$\sqrt{a_1 b} = \sqrt{a b_1};$$

Aber auch, wenn man für a_1 und a ihre Werthe setzt:

$$\frac{a b}{i} = a_1 b_1 i; \quad \text{oder} \quad - a b = + a_1 b_1;$$

oder:

$$i \sqrt{a b} = \sqrt{a_1 b_1} = m,$$

d. h.: Die Halbirungslinie des Winkels der Richtungen (a) und $(-b)$ ist mit derjenigen von a_1 und b_1 gleich gerichtet.

Da nun $(O - A_1) i^\alpha = (O - B_1)$, und, wenn der Schnittpunkt von a und b mit C bezeichnet wird,

$$(O - A_1) + (A_1 - C) + (C - O) = 0$$

ist, ausserdem aber auch:

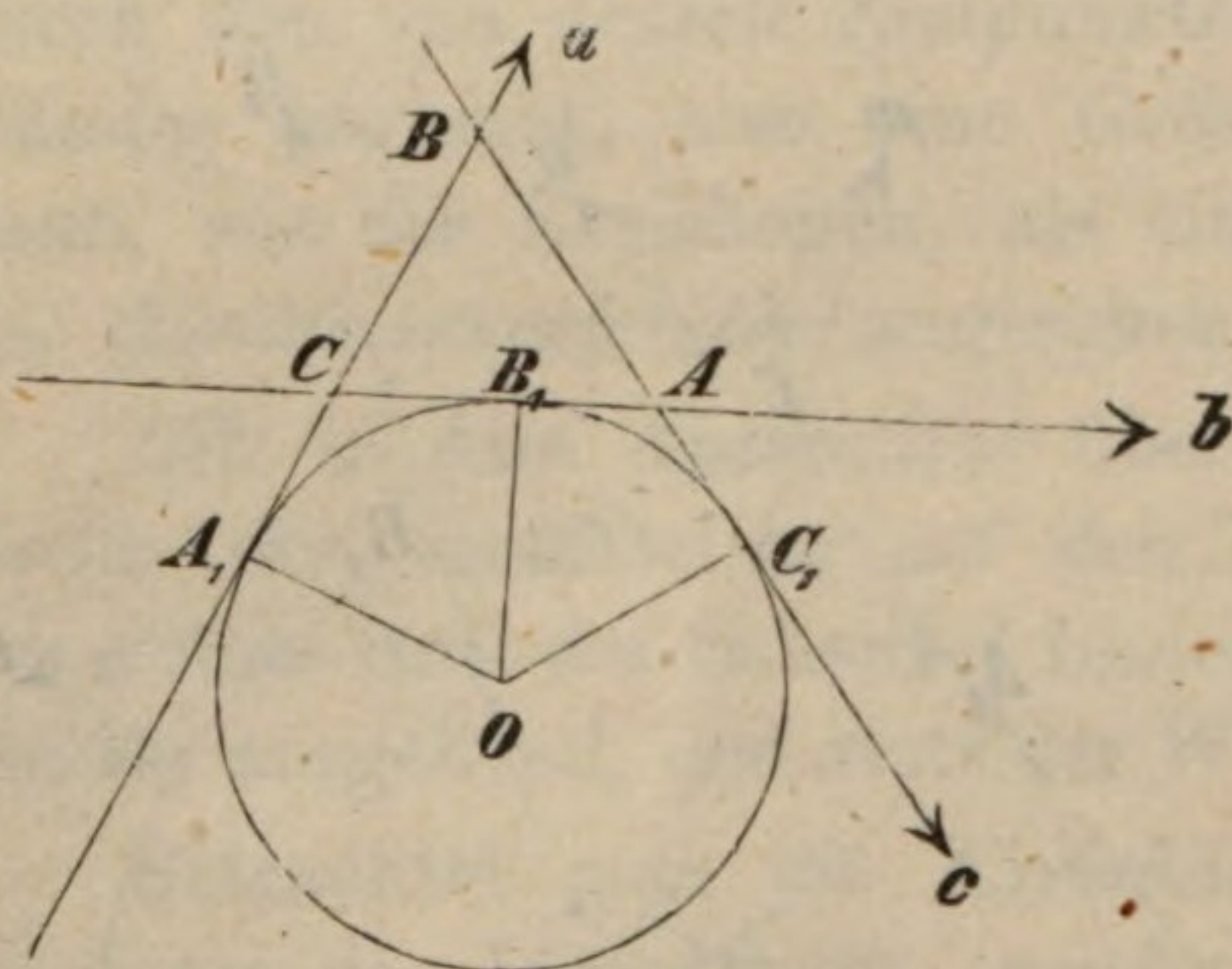
$$(O - B_1) + (B_1 - C) + (C - O) = 0,$$

so sind die Dreiecke der Punkte $(O A_1 C)$ und $(O B_1 C)$ symmetrisch; denn $a_1 : b_1 = a : b$; oder, wenn $a_1 i^\alpha = b_1$, so ist $a \cdot i^{\alpha-2} = -b$; also:

$$(O - A_1) i^\alpha + (A_1 - C) i^{\alpha-2} + (C - O) = 0.$$

Also geht die Halbirungslinie des Winkels $a : (-b)$ durch den Mittelpunkt der Kreislinie, und die Mittelrichtungen zwischen a , $(-b)$ und $a_1 b_1$ fallen in dieselbe Gerade.

105. Wenn die Gerade b durch weitere Drehung in die Richtung c gekommen ist, und der neue Berührungspunkt C_1 genannt wird, die Durch-



schnittspunkte von c mit b und a : A und B ; dann bilden die drei Tangenten a , b , c das Dreieck der Punkte A , B , C , und nach voriger Nr. gehen nun die Halbirungslinien der Nebenwinkel von $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$ sämmtlich durch den Punkt O . Das

Dreieck der Punkte A , B , C heisst „dem Kreise umschrieben“. Wählt man auf den Geraden a , b , c die Richtungen anders, so sind im Ganzen $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ Combinationen möglich, nämlich:

$$\begin{aligned}
 (+a, +b, +c); & \quad (+a, +b, -c); \quad (+a, -b, +c); \\
 & \quad (+a, -b, -c); \\
 (-a, -b, -c); & \quad (-a, -b, +c); \quad (-a, +b, -c); \\
 & \quad (-a, +b, +c);
 \end{aligned}$$

diejenigen der zweiten Reihe gehen aber aus denen der ersten hervor, wenn man auf allen drei Geraden die entgegengesetzte Richtung nimmt. Es bleiben also vier unabhängige Fälle, und jedem davon entspricht ein Berührungskreis. *Die vier Mittelpunkte dieser Berührungskreise sind die Durchschnittspunkte der Halbirungslinien aller von den Geraden a, b, c gebildeten Winkel.*

2. Bewegung einer Strecke.

Wenn keiner der Endpunkte einer Strecke ($A - B$) mit 106. dem Drehungspunkte O zusammenfällt, so kann man immer setzen:

$$(A - B) = (O - B) - (O - A).$$

Ist nun

$$(O - B) i^m = (O - B_1);$$

$$(O - A) i^m = (O - A_1);$$

so folgt:

$$\begin{aligned}
 (A - B) i^m &= (O - B_1) \\
 - (O - A_1) &= (A_1 - B_1);
 \end{aligned}$$

d. h.: Wenn zwei Strecken um ihren gemeinsamen Endpunkt O

gleiche Winkel beschreiben, so beschreibt die Verbindungsstrecke ihrer Endpunkte den gleichen Winkel.

Umgekehrt: Wenn

$$(A - B) i^m = (A_1 - B_1),$$

und

$$(A - B) = (O - B) - (O - A);$$

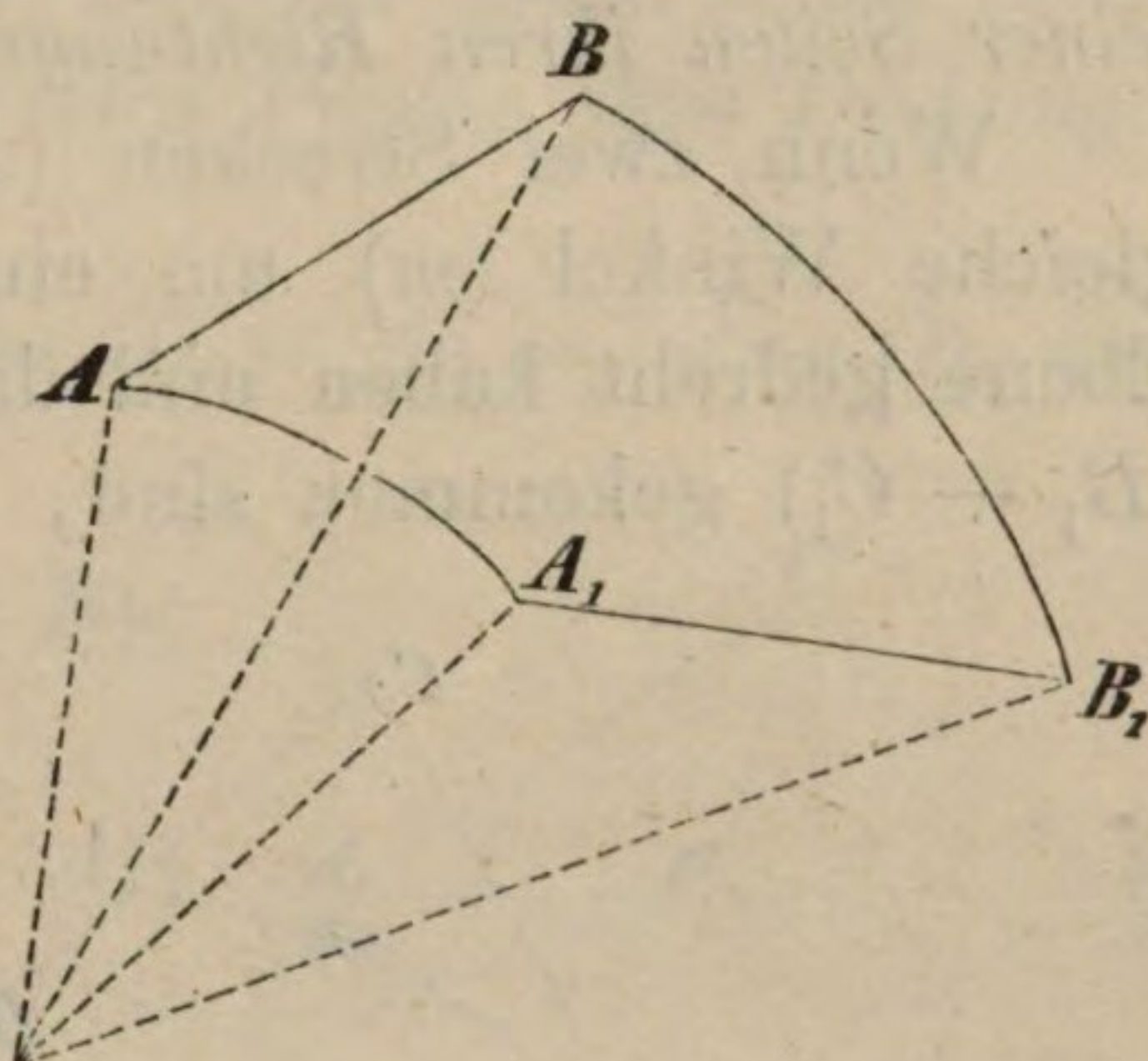
$$(A_1 - B_1) = (O - B_1) - (O - A_1);$$

so folgt:

$$(O - B) i^m - (O - A) i^m = (O - B_1) - (O - A_1).$$

Ist nun $(O - A) i^m = (O - A_1)$; d. h.: beschreibt die Strecke $(O - A)$ denselben Winkel um O , so ist auch

$$(O - B) i^m = (O - B_1).$$



Der Drehungspunkt O ist hiernach der Schnittpunkt der in den Mitten der Strecken $(A - A_1)$ und $(B - B_1)$ construirten senkrechten Geraden. — Analytisch ist der Drehungspunkt bestimmt durch die Formel:

$$\frac{O - A_1}{O - A} = \frac{O - B_1}{O - B}; \quad \text{oder:} \quad \frac{A - B}{O - A} = \frac{A_1 - B_1}{O - A_1}.$$

Für zwei beliebig verschieden gerichtete gleich lange Strecken in der Ebene giebt es stets einen Drehungspunkt.

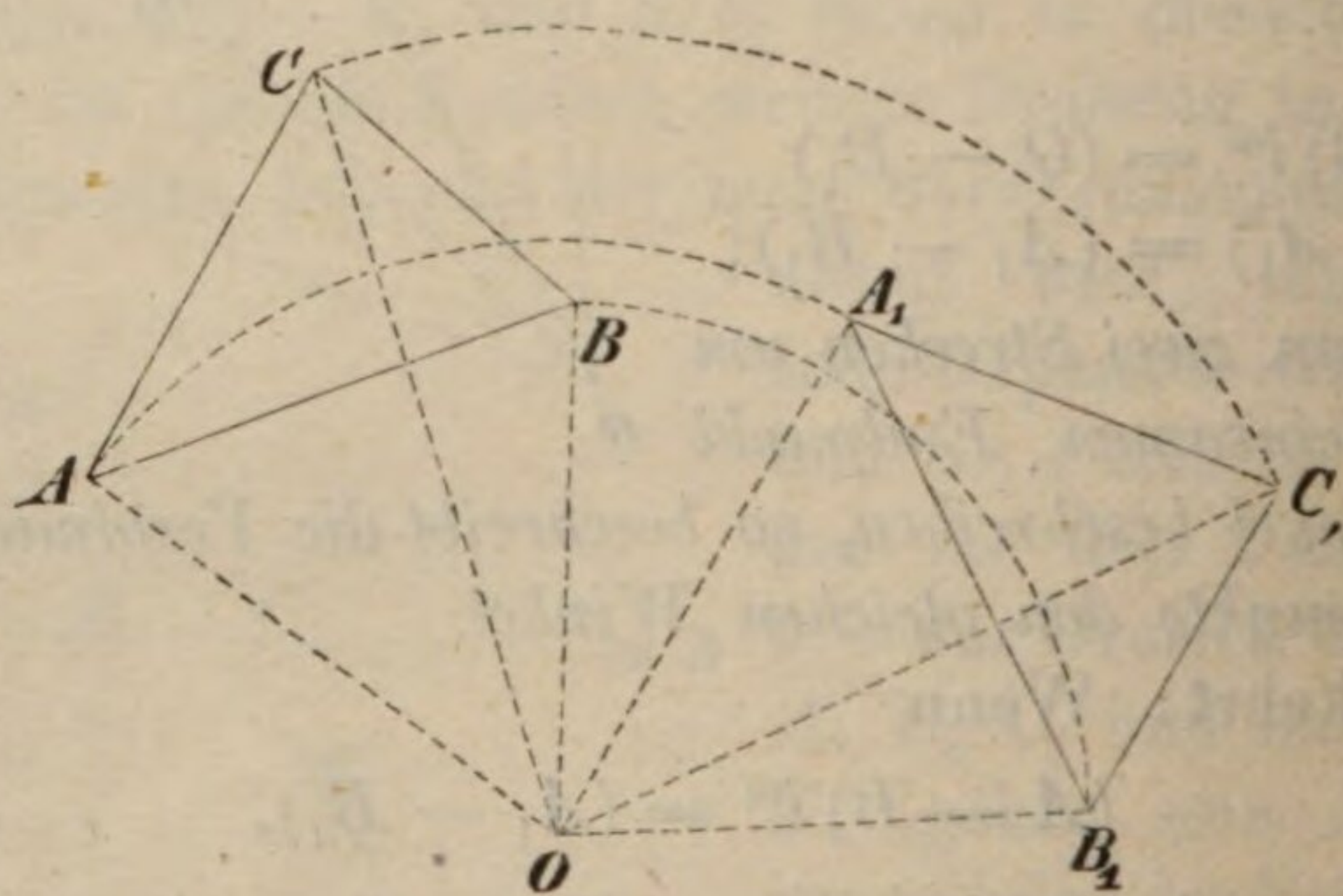
Hieraus nun ergeben sich sogleich für die *Richtungsänderung* eines Dreiecks (OAB) folgende Sätze:

Wenn ein Dreieck sich um einen seiner Eckpunkte dreht, so beschreiben seine Seiten gleiche Winkel.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks um den gemeinsamen Eckpunkt gleiche Winkel beschreiben, so beschreibt die dritte Seite den gleichen Winkel.

Ein Dreieck bleibt durch Drehung ungeändert, wenn zwei seiner Seiten ihren Richtungsunterschied nicht geändert haben.

107. Wenn zwei Strecken $(A - B)$ und $(B - C)$ sich um gleiche Winkel (m) um einen beliebigen Punkt O in der Ebene gedreht haben und dadurch in die Lagen $(A_1 - B_1)$, $(B_1 - C_1)$ gekommen sind, so muss nach voriger Nr. sein:



$$(A - B) i^m = (A_1 - B_1) ; \quad (B - C) i^m = (B_1 - C_1).$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} (A - B) &= (O - B) - (O - A); \\ (A_1 - B_1) &= (O - B_1) - (O - A_1); \\ (B - C) &= (O - C) - (O - B); \\ (B_1 - C_1) &= (O - C_1) - (O - B_1); \end{aligned}$$

folglich:

$$(O - B) i^m - (O - A) i^m = (O - B_1) - (O - A_1);$$

$$(O - C) i^m - (O - B) i^m = (O - C_1) - (O - B_1).$$

Ist nun:

$$(O - A) i^m = (O - A_1),$$

oder $\frac{(A - B)}{(O - A)} = \frac{(A_1 - B_1)}{(O - A_1)}$, wodurch O bestimmt ist, so ist

auch:

$$(O - B) i^m = (O - B_1)$$

und

$$(O - C) i^m = (O - C_1);$$

d. h.: das ganze Dreieck der Punkte (A, B, C) dreht sich um O .

Die Sätze der vorigen Nr. gelten nun für die Drehung um einen beliebigen Punkt der Ebene.

Die letzten Formeln liefern aber noch folgenden Satz:

Die in den Mitten der Verbindungslinien zweier homologer Ecken beliebiger congruenter Dreiecke construirten Senkrechten schneiden sich in einem einzigen Punkte, dem Drehungspunkte.

Ist speciell $O = \frac{A + B}{2}$; also $(O - A) = (B - O)$, und $m = 2$, so folgt:

$$(O - A_1) = (A - O) = (O - B);$$

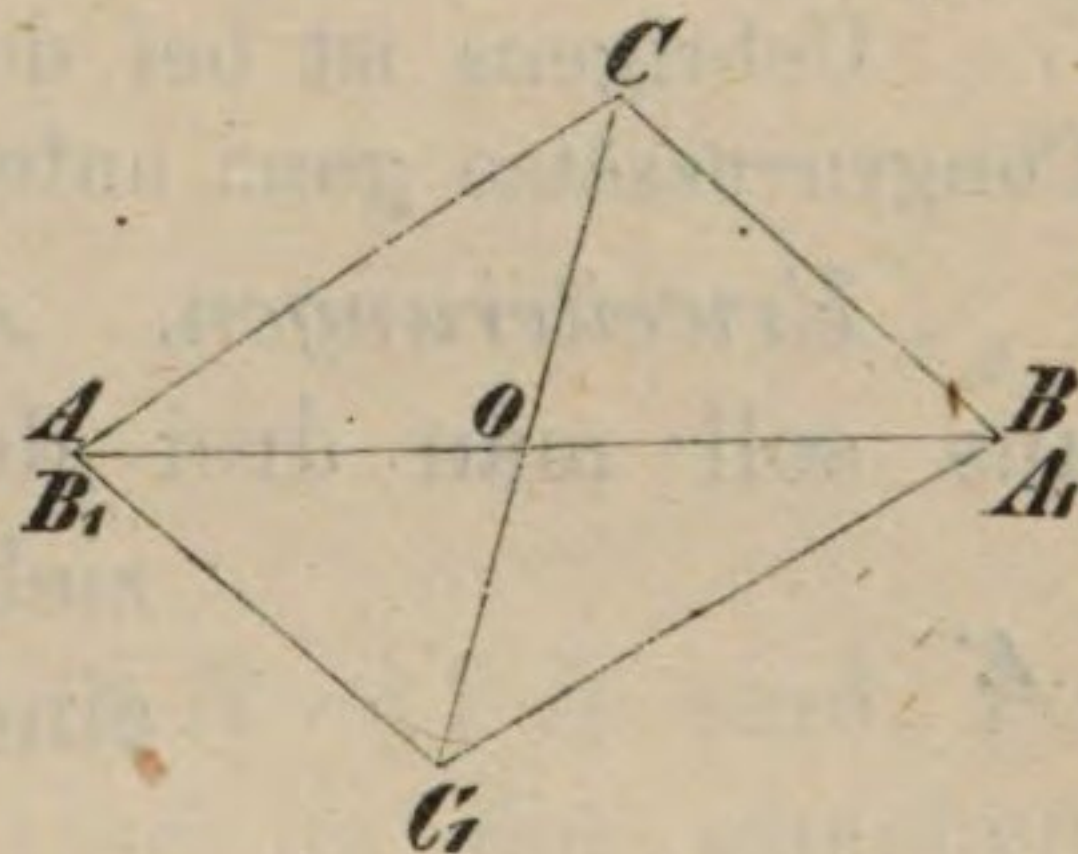
also $A_1 = B$.

$$(O - B_1) = (B - O) = (O - A);$$

also $B_1 = A$.

$$(O - C_1) = (C - O);$$

also $O = \frac{C + C_1}{2} = \frac{A + B}{2}$; d. h.: die



Punkte $A B C C_1$ bilden ein Parallelogramm. *Die Diagonale theilt dasselbe in zwei congruente Dreiecke.* (Vgl. Nr. 112.)

Anm. Auf diese Drehung und auf die früher behandelte Schiebung lässt sich jede Bewegung eines Dreiecks zurückführen. — Die letzte Nr. enthält übrigens, wie man bemerken wird, den einzig wissenschaftlichen Beweis für den Satz, dass zwei Dreiecke congruent sind, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. An die Stelle des vagen Aufeinanderlegens (wobei man nur beweist, dass die auf- oder nebeneinander liegenden Dreiecke congruent sind, und stillschweigend die unerwiesene Annahme macht, dass das durch drei Stücke bestimmte Dreieck beim Transport seine übrigen drei Stücke unverändert behalten müsse) tritt hier der bestimmte Be-

griff der Drehung. — Was die anderen sogenannten Congruenzsätze betrifft, so erscheinen diejenigen, welche die Gleichheit zweier Winkel voraussetzen, als specieller Fall in der Aehnlichkeitslehre. Die beiden anderen erledigen sich wie folgt:

1) Sei

$$(A - B) i^\gamma = (A_1 - B_1); \quad (B - C) i^\alpha = (B_1 - C_1);$$

dann ist:

$$(C - A) i^\beta = (C_1 - A_1);$$

oder:

$$(A - B) i^\gamma + (B - C) i^\alpha + (C - A) i^\beta = 0;$$

$$(B - C) i^{\alpha-\gamma} + (C - A) i^{\beta-\gamma} + (A - B) = 0.$$

Letztere Gleichung bezeichnet entweder ein dem gegebenen symmetrisches Dreieck, bestimmt dann aber auch gleichzeitig die Winkel α, β, γ in bekannter Weise, oder giebt, mit

$$(B - C) + (C - A) + (A - B) = 0$$

verglichen, das Resultat: $\alpha = \beta = \gamma$, woraus wieder die Gleichheit der Winkel des Dreiecks $(A_1 B_1 C_1)$ mit denen von $(A B C)$ folgt.

2) Sei

$$(A - B) i^\gamma = (A_1 - B_1); \quad (B - C) i^\alpha = (B_1 - C_1);$$

$$(B - C) : (B_1 - C_1) = (A - C) : (A_2 - C_1).$$

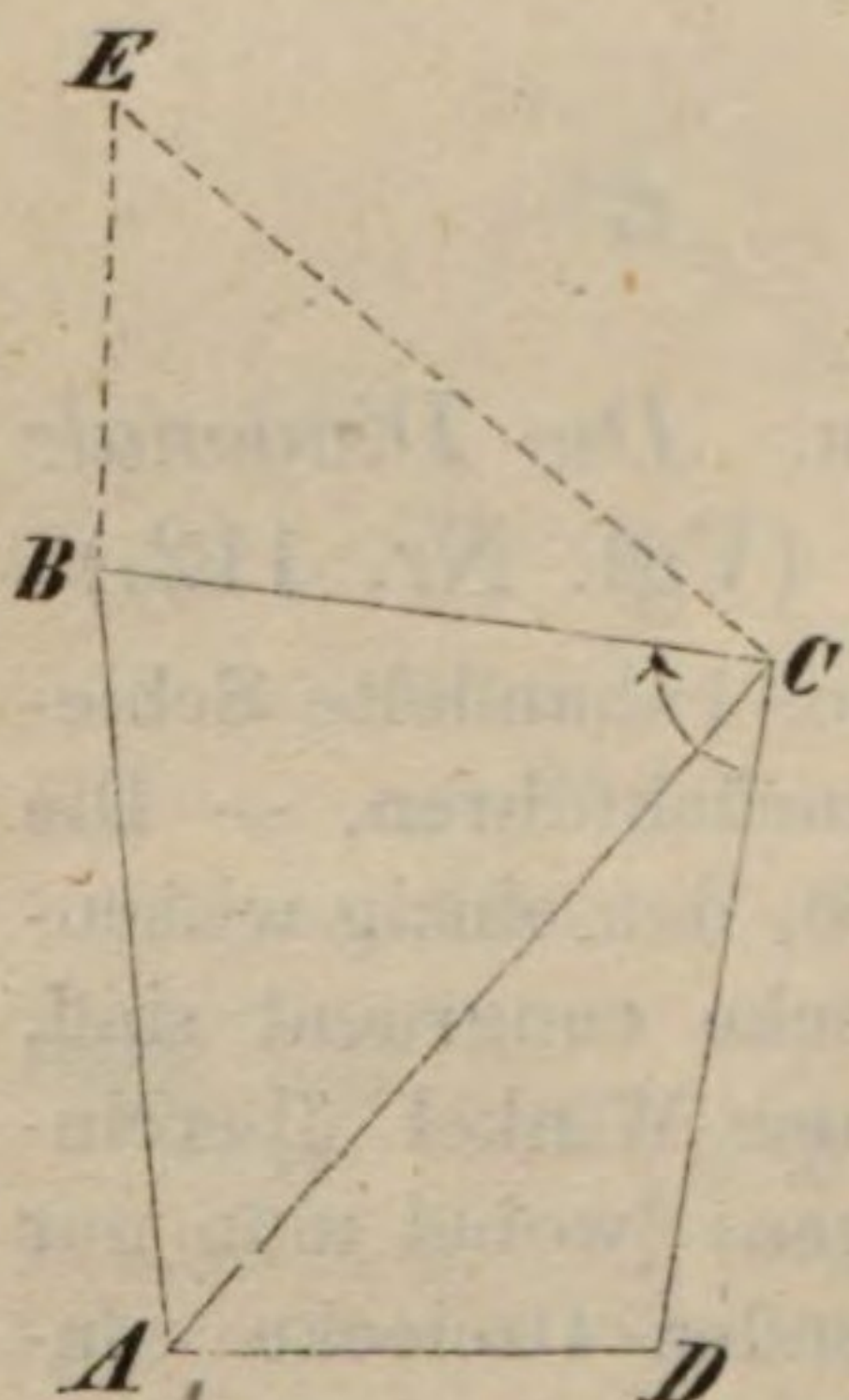
Dann ist:

$$\frac{B - C}{(B - C) i^\alpha} = \frac{A - C}{A_2 - C_1}; \quad \text{oder: } (A - C) i^\alpha = (A_2 - C_1);$$

und da $(B - C) i^\alpha = (B_1 - C_1)$, so ist auch $(A - B) i^\alpha = (A_2 - B_1)$; d. h.: $(A_1 - B_1) i^{\alpha-\gamma} = A_2 - B_1$, und im Falle der Congruenz gleichzeitig $\alpha = \gamma$ und $A_1 = A_2$.

Uebrigens ist bei dem hier befolgten Gange die Bedeutung der Congruenzsätze ganz untergeordnet.

108. *Erweiterungen. Aufgabe:* Von einem gegebenen Punkte aus soll man drei der Länge nach gegebene Strecken so ziehen, dass ihre Endpunkte drei Ecken eines Quadrates bilden.



Analysis. Sei A der gegebene Punkt, und $ABCD$ die gesuchte Figur. Dann soll sein:

$$(C - D) i = (C - B),$$

oder:

$$(CA - DA) i = (CA - BA);$$

$$CA \cdot i - DA \cdot i = CA - BA (= CB);$$

d. h.: die vier Strecken $CA \cdot i$, $DA \cdot i$, BA und CA , welche alle nach Lage und Richtung bestimmt sind, bilden ein Viereck.

Construction. Demnach ziehe man von A aus CA in beliebiger Richtung, dann $CA \cdot i = CE$; dann muss der

Punkt B gemeinsamer Endpunkt der Strecken $DA \cdot i$ und BA sein, wird also durch die aus E und A resp. mit AD und AB beschriebenen Kreise bestimmt.

Da $CD \cdot i - CD - BD = CB$ ist, so hat man noch:

$$CA \cdot i - DA \cdot i = CD \cdot i;$$

oder:

$$CE - BE = CB;$$

d. h.: die Dreiecke der Punkte (CAD) und (CEB) sind congruent.

Aufgabe: Zu beweisen, dass ein Punkt auf der Peripherie des einem gleichseitigen Dreieck umschriebenen Kreises liegt, wenn die mittlere seiner Verbindungslinien mit den Ecken numerisch gleich der Summe der beiden anderen ist.

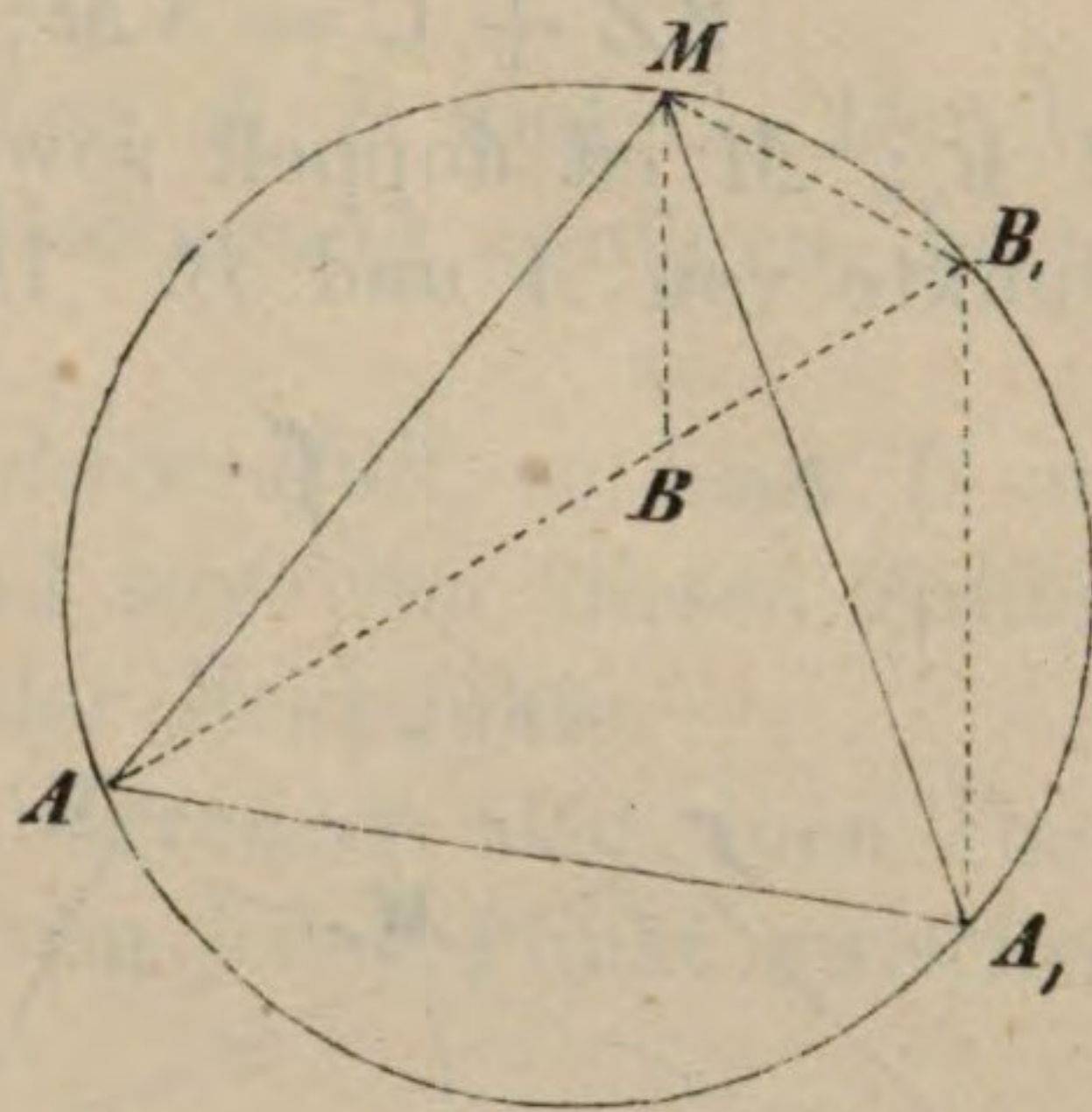
Wenn ein Dreieck (ABM) , welches bei B einen Winkel von $\frac{4}{3}R$ hat, um den Punkt M eine Drehung von $\frac{2}{3}R$ macht, so ist:

$$(M - A_1) = (M - A) i^{\frac{2}{3}},$$

$$(M - B_1) = (M - B) i^{\frac{2}{3}},$$

$$(A_1 - B_1) = (A - B) i^{\frac{2}{3}}.$$

Demnach sind die Dreiecke (AMA_1) und (BMB_1) gleichseitig; also numerisch $(B_1M) = (B_1B)$; ausserdem $(BA) = (B_1A_1)$. Da ferner die Winkel bei B gleich $\frac{4}{3}R + \frac{2}{3}R = 2R$ sind, so liegen $AB B_1$ in gerader Linie. — Und da die gleichen Winkel bei A und A_1 Peripheriewinkel über derselben Sehne (MB_1) sind, so liegen die vier Punkte MAA_1B_1 auf der Peripherie desselben Kreises.



Anm. Diese beiden Aufgaben zeigen, wie auch in Anwendungen die Congruenz der Dreiecke durch den Drehungsbegriff ersetzt werden kann. — In der ersten Aufgabe fällt die leichte Auffindung der sonst versteckten Analysis in die Augen, in der zweiten der organische Zusammenhang des zu beweisenden Satzes mit dem System.

B. Grössen, abgeleitet aus mehreren festen Strecken oder Punkten.

1. Einfache Grössen.

ℳ. Abgeleitet aus mehreren festen Punkten.

a) Grössen vom ersten Grade.

110. Der Mittelpunkt M zweier Punkte A und B in einer Geraden wurde bestimmt durch die Formel: $M = \frac{A+B}{2}$. Nennen wir analog denjenigen Punkt M den Mittelpunkt dreier Punkte A, B, C in einer Ebene, welcher bestimmt ist durch die Formel:

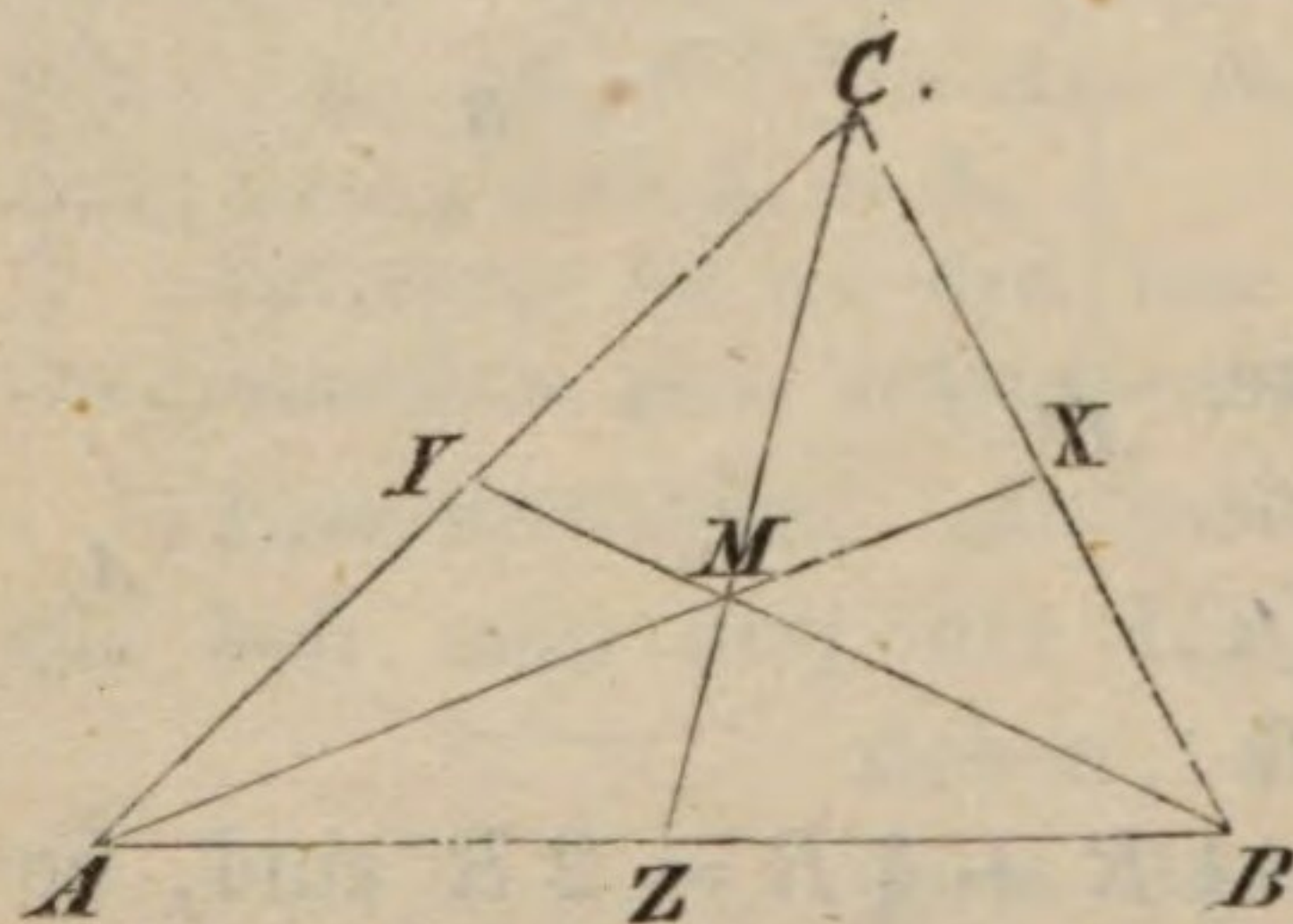
$$M = \frac{A+B+C}{3} \cdot *)$$

Setzen wir $A+B=2Z$, so folgt:

$$2Z+C=3M; \text{ oder: } M = \frac{2}{3}Z + \frac{1}{3}C;$$

d. h.: M ist doppelt soweit von C entfernt, als vom Mittelpunkt von A und B . Dasselbe gilt für die anderen Eck-

punkte, wenn wir die Buchstaben A, B, C und X, Y, Z circular vertauschen. Also:



$$2X+A=3M;$$

$$2Y+B=3M;$$

$$2Z+C=3M;$$

$$2(X+Y+Z) + (A+B+C) = 9M;$$

$$2(X+Y+Z) = 6M;$$

$$X+Y+Z = 3M;$$

d. h.: die Halbirungspunkte X, Y, Z haben denselben Mittelpunkt wie die gegebenen Punkte.

111. Sei zur Verallgemeinerung der letzten Betrachtung ein beliebiger Punkt X_1 auf $(B-C)$ durch

$$X_1 = \beta_1 B + \gamma_1 C \quad (\beta_1 + \gamma_1 = 1)$$

bestimmt; ein Punkt U auf $(A-X_1)$ durch

$$U = \alpha_1 A + \delta_1 X_1 \quad (\alpha_1 + \delta_1 = 1);$$

*) Vgl. G. A. I. S. 41. 42.

dann ist:

$$U = \alpha_1 A + \beta_1 \delta_1 B + \gamma_1 \delta_1 C \quad (\alpha_1 + \beta_1 \delta_1 + \gamma_1 \delta_1 = 1).$$

Diese Formel zeigt, wie ein beliebiger Punkt der Ebene durch *drei gegebene feste Punkte* bestimmt wird.

Sei allgemein:

$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C; \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Dann sind hinsichtlich der Grössen α, β, γ drei Fälle zu unterscheiden; und zwar lässt sich der gegenwärtige Fall durch die Bedingung ausdrücken:

1) α, β, γ sind alle *kleiner als Eins*, und alle *positiv*.

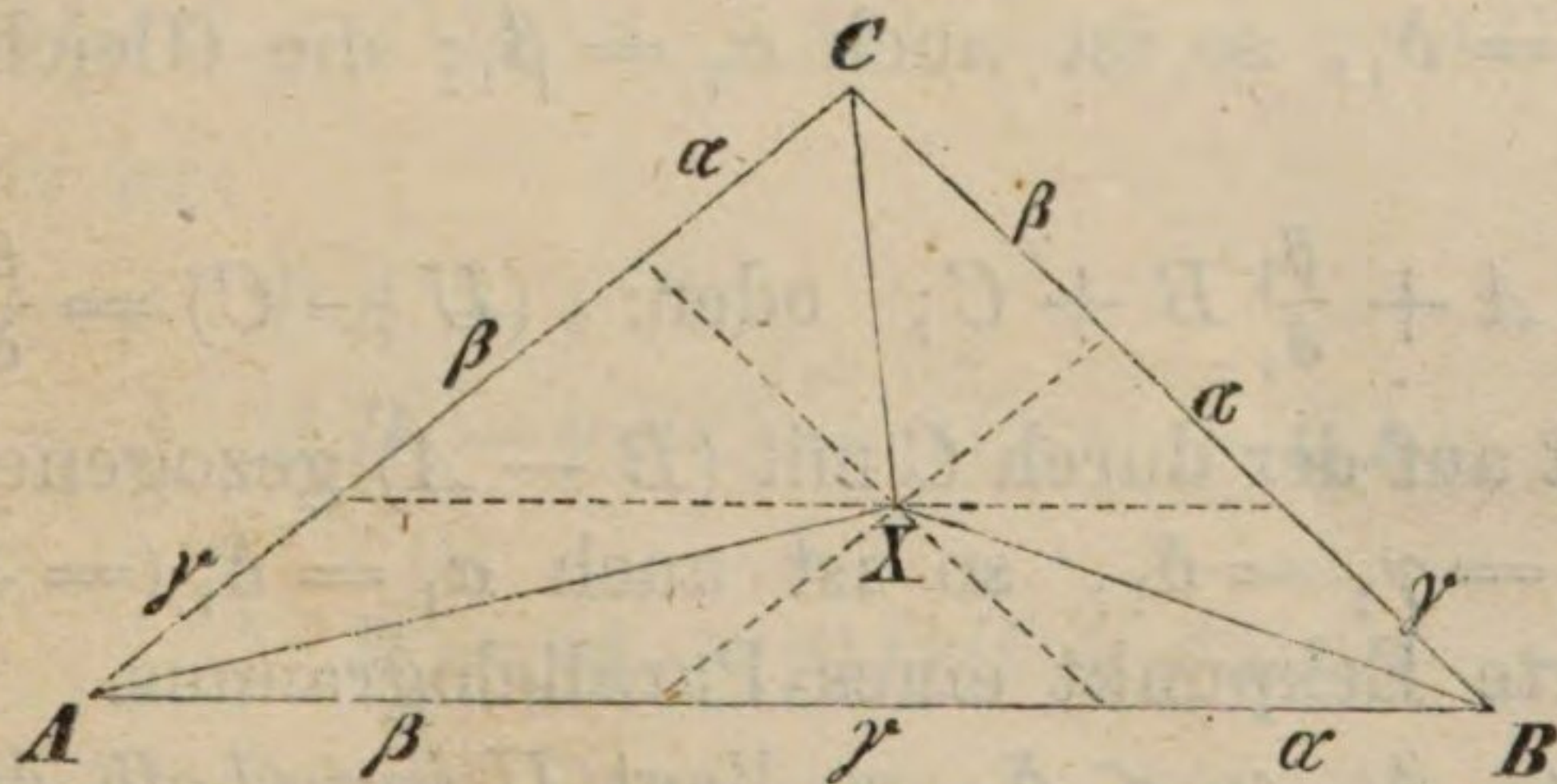
Wenn ein Punkt X_1 zwischen B und C , und ein anderer, U , zwischen A und X_1

liegt, so sagen wir, U liege zwischen A, B und C . Der Inbegriff aller Punkte, welche dieser Bedingung genügen, heisst eine *Dreiecksfläche* (ein Dreieck).

Ist *eine* der Grössen α, β, γ *gleich Null*, so liegt U auf einer der Seiten des Dreiecks; sind *zwei* von diesen Zahlen gleich Null, so liegt U in einem der Eckpunkte.

Die drei Seiten eines Dreiecks begrenzen also einen Theil der Ebene (die Dreiecksfläche), worin jeder Punkt zwischen den Punkten A, B, C liegt.

Multipliziert man die Gleichung $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$ der Reihe nach äusserlich mit A, B, C , so folgt:



$$\begin{aligned} AX &= \beta AB + \gamma AC; & BX &= \gamma BC + \alpha BA; \\ CX &= \alpha CA + \beta CB; \end{aligned}$$

oder für die erste dieser Formeln:

$$A(A - X) = \beta A(A - B) + \gamma A(A - C);$$

oder: $(A - X) = \beta(A - B) + \gamma(A - C).$

In analoger Gestalt lassen sich auch die beiden anderen Formeln schreiben. Sie lehren nun, wie der Punkt X durch Construction gefunden werden kann.

112. Sei wiederum

$$X_1 = \beta_1 B + \gamma_1 C; \quad (\beta_1 + \gamma_1 = 1);$$

aber ausserdem:

$$X_1 = \alpha_1 A + \delta_1 U; \quad (\alpha_1 + \delta_1 = 1).$$

Dann ist:

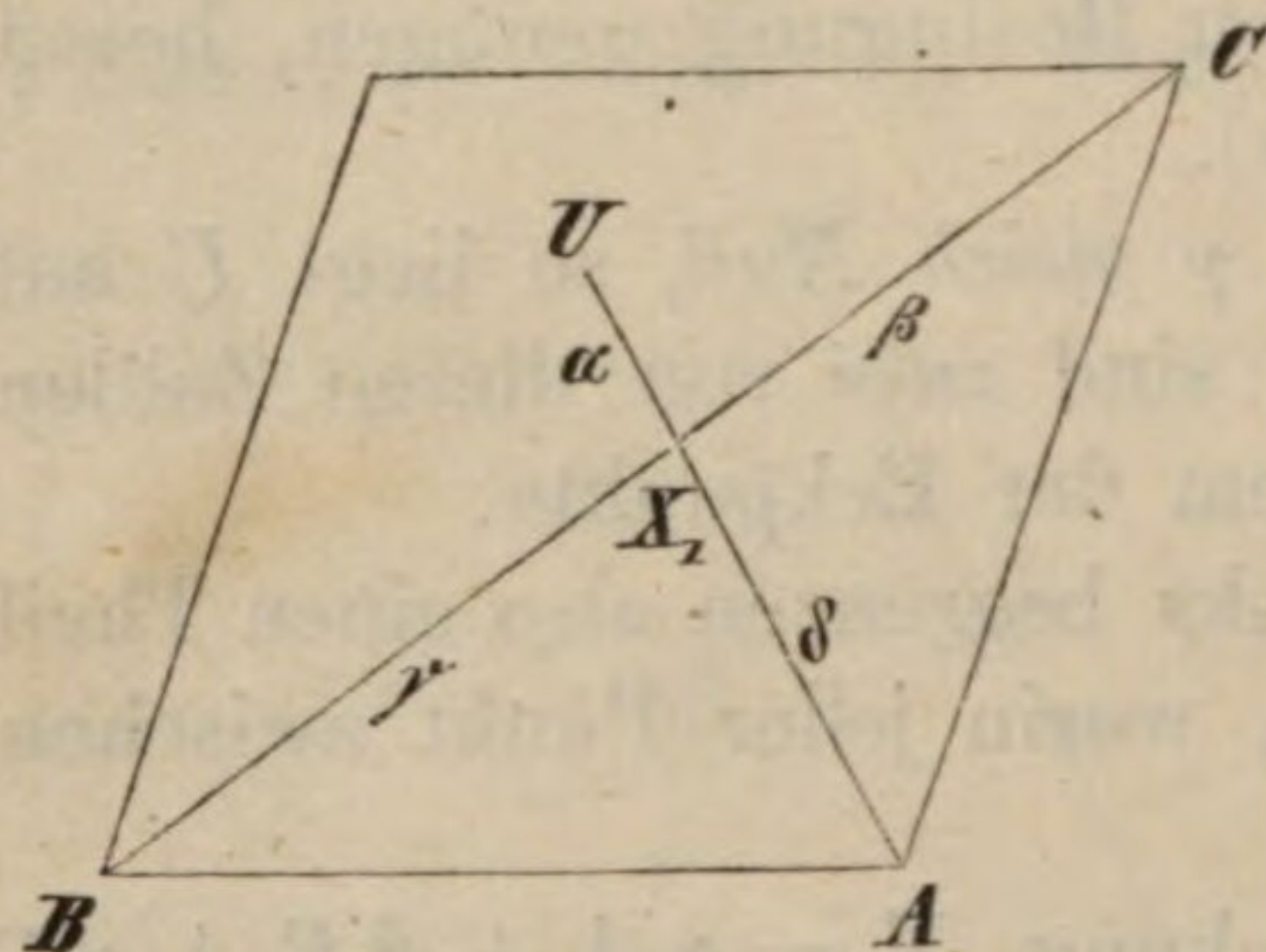
$$\delta_1 U = -\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C;$$

$$U = -\frac{\alpha_1}{\delta_1} A + \frac{\beta_1}{\delta_1} B + \frac{\gamma_1}{\delta_1} C.$$

Wenn also in der Gleichung:

$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

eine der Zahlen negativ ist, so liegt der Punkt X jenseits der Seite, welche dem negativen Punkte gegenüberliegt.



Ist $\beta_1 = \delta_1$, so ist auch $\alpha_1 = \gamma_1$; die Gleichung für U lautet:

$$U = -\frac{\gamma_1}{\delta_1} A + B + \frac{\gamma_1}{\delta_1} C;$$

oder:

$$(U - B) = \frac{\gamma_1}{\delta_1} (C - A);$$

und U liegt auf der durch B mit $(C - A)$ gezogenen Parallele.

Ist $\gamma_1 = \delta_1$, so ist auch $\alpha_1 = \beta_1$; die Gleichung für U lautet:

$$U = -\frac{\beta_1}{\delta_1} A + \frac{\beta_1}{\delta_1} B + C; \quad \text{oder:} \quad (U - C) = \frac{\beta_1}{\delta_1} (B - A);$$

und U liegt auf der durch C mit $(B - A)$ gezogenen Parallele.

Ist $\beta_1 = \gamma_1 = \delta_1$, so ist auch $\alpha_1 = \delta_1 (= \frac{1}{2})$, und U ist der vierte Eckpunkt eines Parallelogramms.

Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 < \delta_1$, so liegt U innerhalb dieses Parallelogramms, sonst ausserhalb.

In der allgemeinen Gleichung bestehen also für ersteren Fall folgende Bedingungen:

2) $\alpha \beta \gamma$ sind alle *kleiner als Eins*, aber *eine* dieser Zahlen *negativ*.

Dreht man nun das Dreieck der Punkte $(A B C)$ um den Mittelpunkt von $(A - B)$ durch einen gestreckten Winkel, so dass

$$A_1 = B; \quad B_1 = A;$$

$$C + C_1 = A + B$$

wird, so ist:

$$X = (\beta + \gamma) A_1 \\ + (\alpha + \gamma) B_1 - \gamma C_1;$$

d. h.: der Punkt X liegt im Dreieck der Punkte $(A B C)$ und im Parallelogramm der Punkte $(A B C C_1)$.

Sei

$$X_1 = \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C,$$

so ist auch:

$$X_1 = \alpha B + \beta A + \gamma C.$$

Also jedem Punkte im Dreieck $(A B C)$ entspricht ein anderer im Dreieck $(A_1 B_1 C_1)$. Letzteres heisst das *Ergänzungsdreieck* des ersteren; jede der beiden Dreiecksflächen ist *halb so gross als die Fläche des Parallelogramms*. Da auch die Zahlen α und β negativ sein können, so hat das Dreieck drei Ergänzungsdreiecke.

Aus $A X = \beta A B + \gamma A C$ folgt:

$$A X = \beta (A C + C B) + \gamma A C = (\beta + \gamma) A C + \beta C B.$$

Andererseits ist:

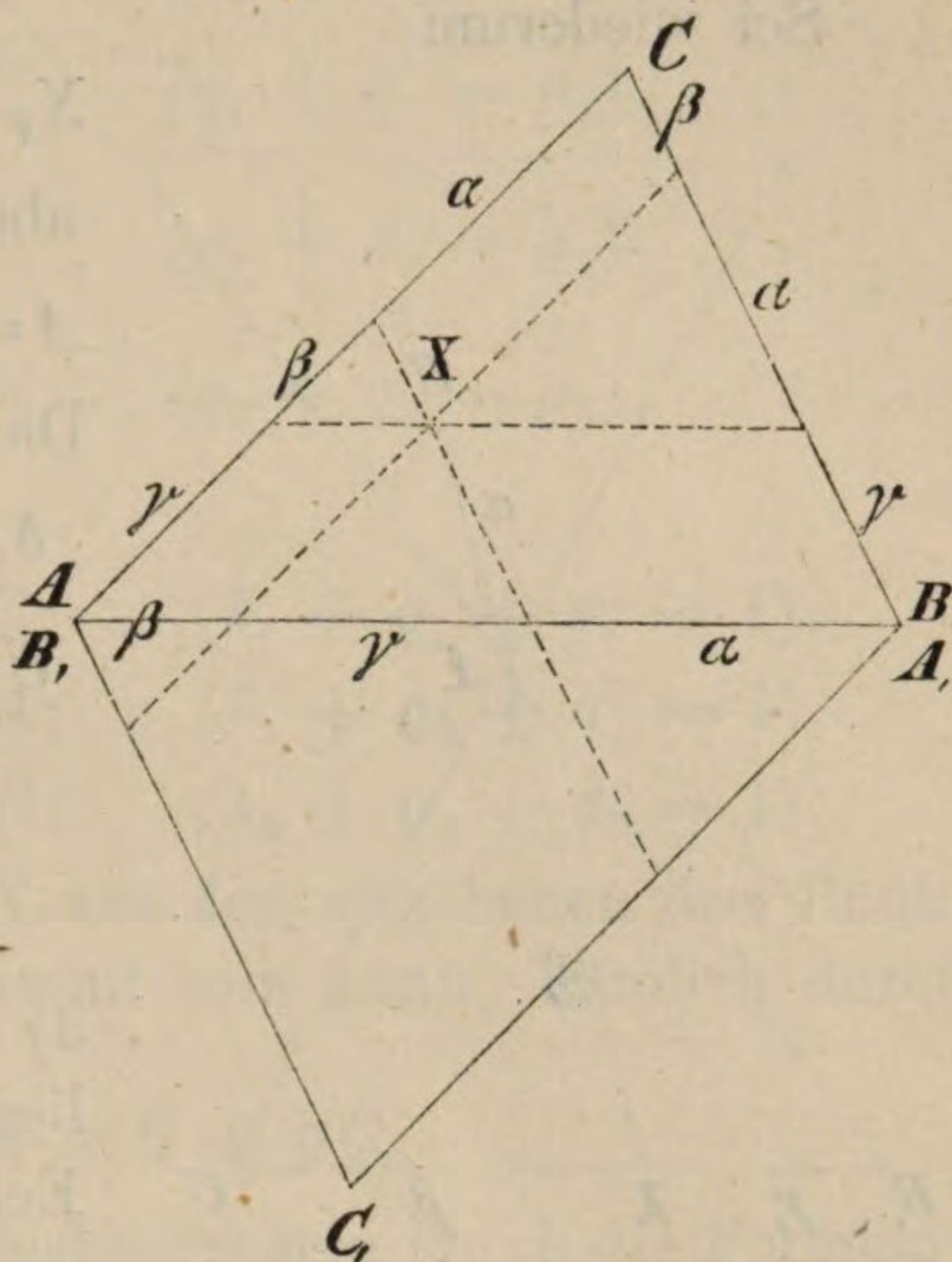
$$B X_1 = \beta \cdot B A + \gamma B C;$$

$$X_1 B = \beta \cdot A B - \gamma B C = \beta (A C + C B) - \gamma B C;$$

folglich:

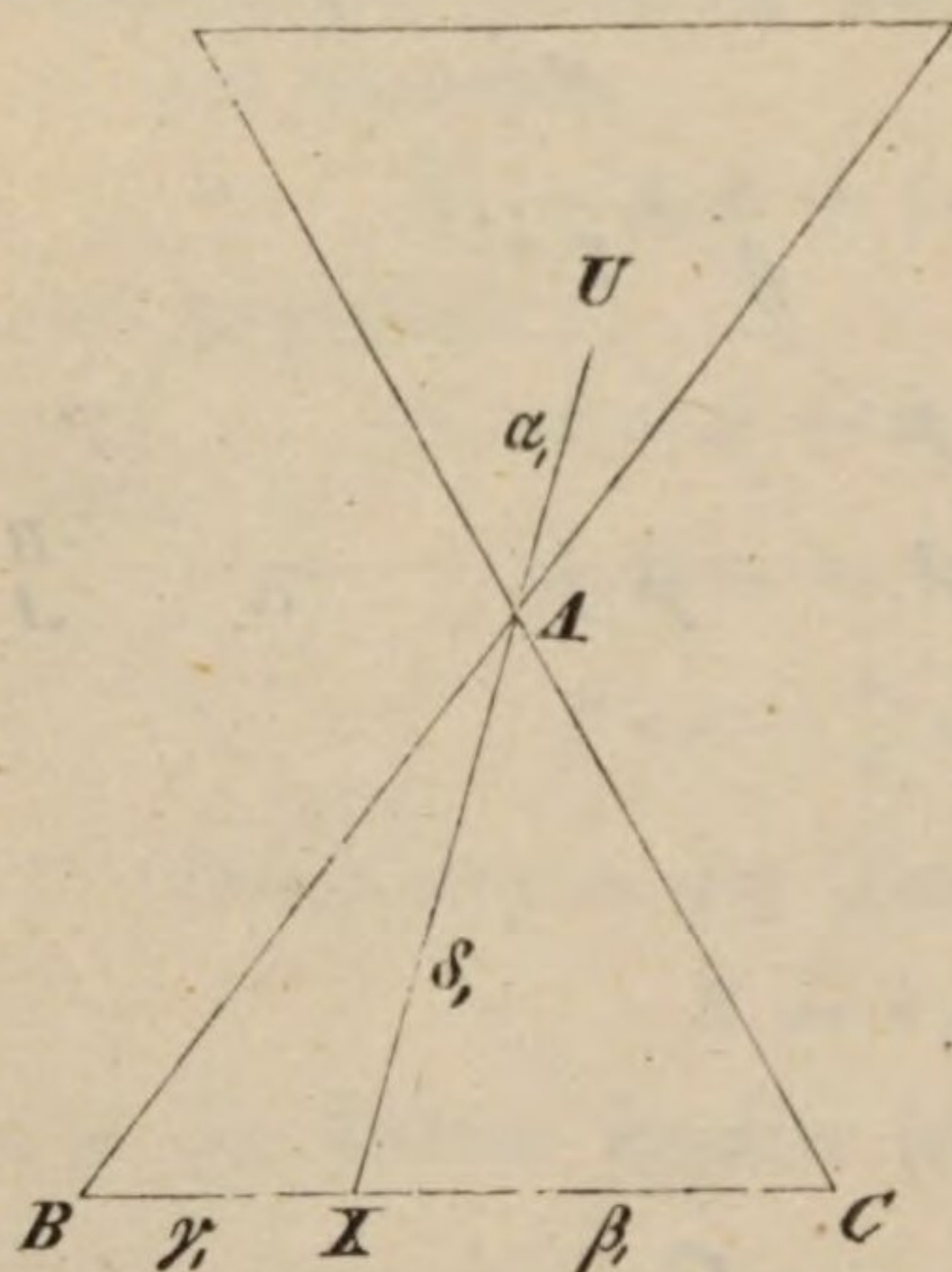
$$X_1 B = (\beta + \gamma) C B + \beta A C.$$

Der Punkt X liegt also in einem Dreieck, wenn im Ausdrucke für $A X$ die Coefficienten der Glieder in bestimmter Reihenfolge abnehmen; in einem Parallelogramm ohne diese Bedingung. Im letzteren Falle kann man die Zahlen β und



$(\beta + \gamma)$ beliebig an die Glieder AC und CB vertheilen. Hiermit ist die Bedingung festgestellt, unter der ein Punkt in einem Parallelogramm liegt. *)

113. Sei wiederum



$$X_1 = \beta_1 B + \gamma_1 C; \quad (\beta_1 + \gamma_1 = 1);$$

aber ausserdem:

$$A = \alpha_1 X_1 + \delta_1 U; \quad (\alpha_1 + \delta_1 = 1).$$

Dann ist:

$$\delta_1 U = A - \alpha_1 \beta_1 B - \alpha_1 \gamma_1 C;$$

$$U = \frac{1}{\delta_1} A - \frac{\alpha_1 \beta_1}{\delta_1} B - \frac{\alpha_1 \gamma_1}{\delta_1} C.$$

Wenn also in der Gleichung

$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

3) zwei Zahlen negativ sind, so liegt der Punkt X jenseits der Ecke, welche der Strecke der negativen Punkte gegenüberliegt.

Die weitere Ausführung dieses Falles, die sich ganz analog mit Nr. 112. gestaltet, übergehen wir ihrer geringeren Wichtigkeit wegen.

114. *Erweiterungen und Anwendungen.* Ein Punkt X sei durch drei feste Punkte, $A B C$, so bestimmt, dass

$$X = m A + n B + p C. \quad (m + n + p = 1).$$

Bezeichnen wir durch

X_1 den Durchschnittspunkt von XA und BC .

X_2 „ „ „ „ XB „ CA .

X_3 „ „ „ „ XC „ AB .

Dann liegen auf je einer Geraden die Punkte:

$$X A X_1; \quad X B X_2; \quad X C X_3;$$

$$B C X_1; \quad C A X_2; \quad A B X_3.$$

Diese Beziehungen mögen dargestellt sein durch die Formeln:

*) Vgl. G. A. I. § 110, 111.

$$X = \lambda_1 A + \mu_1 X_1; \quad (\lambda_1 + \mu_1 = 1).$$

$$X = \lambda_2 B + \mu_2 X_2; \quad (\lambda_2 + \mu_2 = 1).$$

$$X = \lambda_3 C + \mu_3 X_3; \quad (\lambda_3 + \mu_3 = 1).$$

$$X_1 = \frac{\varrho_1}{\mu_1} B + \frac{\sigma_1}{\mu_1} C; \quad (\varrho_1 + \sigma_1 = \mu_1).$$

$$X_2 = \frac{\varrho_2}{\mu_2} C + \frac{\sigma_2}{\mu_2} A; \quad (\varrho_2 + \sigma_2 = \mu_2).$$

$$X_3 = \frac{\varrho_3}{\mu_3} A + \frac{\sigma_3}{\mu_3} B; \quad (\varrho_3 + \sigma_3 = \mu_3).$$

Hieraus folgt sogleich:

$$X = \lambda_1 A + \varrho_1 B + \sigma_1 C; \quad (\lambda_1 + \varrho_1 + \sigma_1 = 1).$$

$$X = \lambda_2 B + \varrho_2 C + \sigma_2 A; \quad (\lambda_2 + \varrho_2 + \sigma_2 = 1).$$

$$X = \lambda_3 C + \varrho_3 A + \sigma_3 B; \quad (\lambda_3 + \varrho_3 + \sigma_3 = 1).$$

Da aber derselbe Punkt X aus den gegebenen drei Punkten nur auf *eine* Weise bestimmt sein kann, nämlich durch die Formel:

$$X = m A + n B + p C,$$

so müssen die Zahlen λ, ϱ, σ bestimmt sein durch die Formeln:

$$\lambda_1 = \sigma_2 = \varrho_3 = m;$$

$$\lambda_2 = \sigma_3 = \varrho_1 = n;$$

$$\lambda_3 = \sigma_1 = \varrho_2 = p.$$

Die obigen Gleichungen gehen hiernach über in:

$$X = m A + (n + p) X_1;$$

$$X = n B + (p + m) X_2;$$

$$X = p C + (m + n) X_3;$$

$$X_1 = \frac{n}{n+p} B + \frac{p}{n+p} C;$$

$$X_2 = \frac{p}{p+m} C + \frac{m}{p+m} A;$$

$$X_3 = \frac{m}{m+n} A + \frac{n}{m+n} B.$$

Specielle Fälle: 1) Sind von den drei Zahlen $m n p$ zwei, z. B. p und n , einander gleich, so heisst die durch A und X_1 bestimmte Gerade (resp. die Strecke $A - X_1$): *Transversale*. Eine Transversale im Dreieck der Punkte $(A B C)$, halbirt also eine Seite. Denn es ist nun:

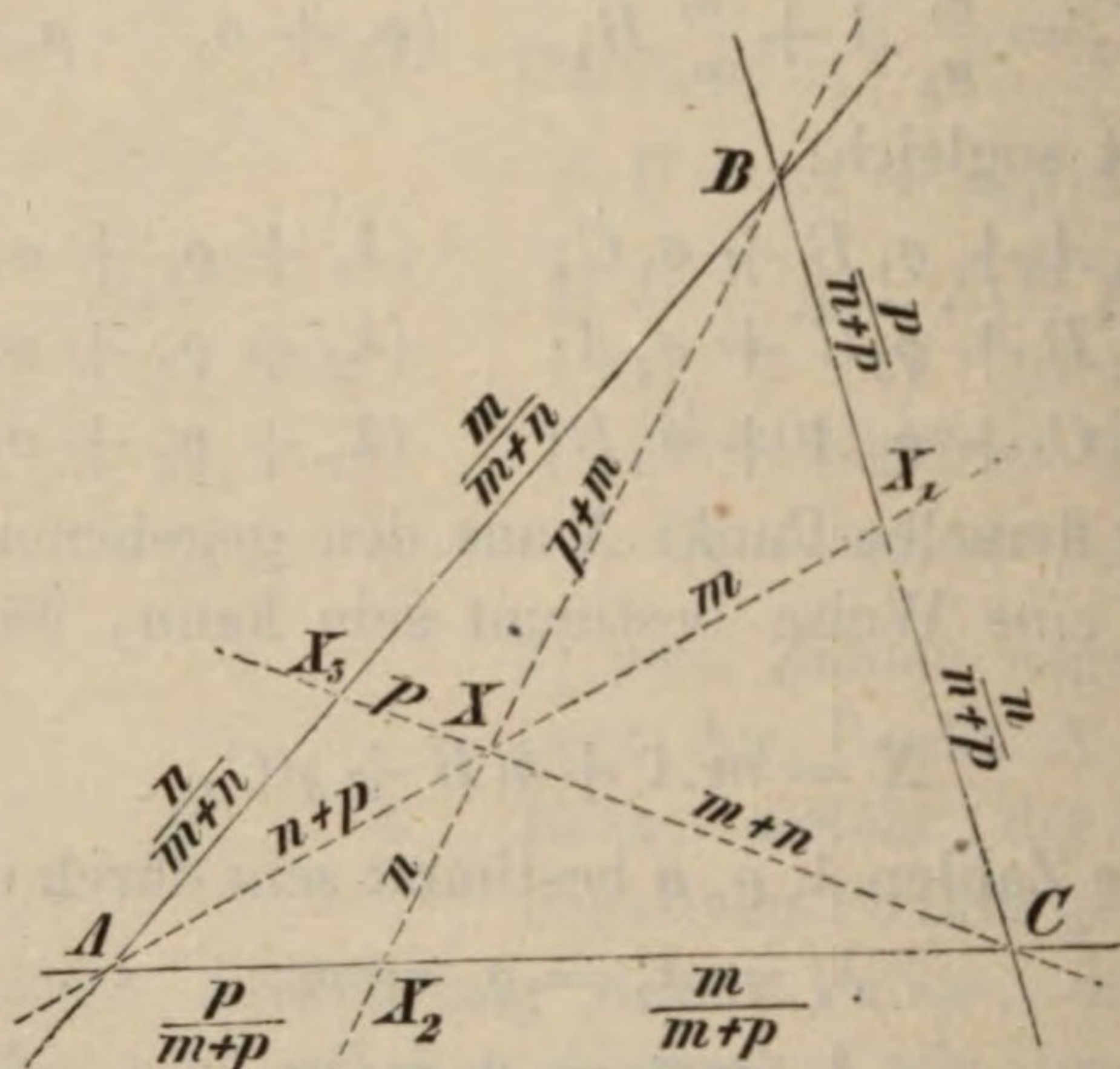
$$X_1 = \frac{1}{2}(B + C).$$

Die Formeln für X_2 und X_3 aber lauten jetzt:

$$X_2 = \frac{n}{m+n} C + \frac{m}{m+n} A;$$

$$X_3 = \frac{n}{m+n} B + \frac{m}{m+n} A;$$

d. h.: Die Strecke $(C - A)$ wird durch X_2 in demselben Verhältnisse getheilt, wie $(B - A)$ durch X_3 , oder: Zwei



durch einen beliebigen Punkt einer Transversale ($A X_1$) und die zwei Eckpunkte (B, C) gezogene Geraden theilen die Seiten $(A - B)$ und $(A - C)$ in gleichem Verhältniss.

Die letzten beiden Formeln für X lauten:

$$X = nB + (m + n) X_2 \quad ; \quad X = nC + (m + n) X_3;$$

d. h.: Die Strecken $(B - X_2)$ und $(C - X_3)$ werden durch X ebenfalls in gleichem Verhältniss getheilt.

2) Ist $p = m = n$, so zeigen die Formeln für X_1, X_2, X_3 , dass die drei Geraden ($A X_1$), ($B X_2$), ($C X_3$) sämtlich Transversalen sind; d. h.: Die drei Transversalen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte; oder: Die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes zweier Transversalen mit der dritten Ecke halbirt die dritte Seite.

Die Formeln für X zeigen, dass die drei Transversalen durch X im Verhältniss von $1 : 2$ getheilt werden. — Auch ist X der Mittelpunkt der drei Punkte A, B, C .

Aus den Formeln für X_1, X_2, X_3 folgt durch äussere 116.
Multiplication:

$$B X_1 = \frac{p}{n+p} \cdot B C; \quad C X_1 = \frac{n}{n+p} C B;$$

$$C X_2 = \frac{m}{p+m} \cdot C A; \quad A X_2 = \frac{p}{p+m} A C;$$

$$A X_3 = \frac{n}{m+n} \cdot A B; \quad B X_3 = \frac{m}{m+n} B A;$$

oder:

$$B X_1 : C X_1 = - (p : n);$$

$$C X_2 : A X_2 = - (m : p);$$

$$A X_3 : B X_3 = - (n : m);$$

und durch Multiplication dieser drei Formeln:

$$(B X_1) \cdot (C X_2) \cdot (A X_3) = - (C X_1) \cdot (A X_2) \cdot (B X_3);$$

oder:

$$(B X_1) \cdot (C X_2) \cdot (A X_3) = (X_1 C) \cdot (X_2 A) \cdot (X_3 B);$$

als Ausdruck des Satzes: *Verbindet man einen Punkt der Ebene mit den drei Ecken eines Dreiecks, so ist auf den Seiten des Dreiecks das Product der drei ungeraden Abschnitte gleich dem der drei geraden.*

Seien die Punkte $X_1 X_2 X_3$ durch Geraden verbunden, 117.
und bezeichnen wir durch

A_1 den Durchschnittspunkt von $X_2 X_3$ und BC ;

B_1 „ „ „ $X_3 X_1$ „ CA ;

C_1 „ „ „ $X_1 X_2$ „ AB .

Dann liegen auf je einer Geraden die Punkte:

$$A_1 X_2 X_3; \quad B_1 X_3 X_1; \quad C_1 X_1 X_2;$$

$$A_1 B C; \quad B_1 C A; \quad C_1 A B.$$

Diese Beziehungen mögen dargestellt werden durch die Formeln:

$$A_1 = \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3; \quad A_1 = \varrho_1 B + \sigma_1 C;$$

$$B_1 = \mu_3 X_3 + \mu_1 X_1; \quad B_1 = \varrho_2 C + \sigma_2 A;$$

$$C_1 = \nu_1 X_1 + \nu_2 X_2; \quad C_1 = \varrho_3 A + \sigma_3 B.$$

Hieraus folgt:

$$\lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = \varrho_1 B + \sigma_1 C;$$

$$\mu_3 X_3 + \mu_1 X_1 = \varrho_2 C + \sigma_2 A;$$

$$\nu_1 X_1 + \nu_2 X_2 = \varrho_3 A + \sigma_3 B.$$

Andererseits erhält man aber aus den früheren Formeln für $X_1 X_2 X_3$:

$$(m + p) X_2 - (m + n) X_3 = p C - n B;$$

$$(n + m) X_3 - (n + p) X_1 = m A - p C;$$

$$(p + n) X_1 - (p + m) X_2 = n B - m A.$$

Da beide Gruppen von Formeln die nämlichen drei Durchschnittspunkte ausdrücken, und die Coefficienten-Summen gleich Eins sein müssen, so hat man:

$$A_1 = \frac{m + p}{p - n} X_2 - \frac{m + n}{p - n} X_3 = \frac{p}{p - n} C - \frac{n}{p - n} B.$$

$$B_1 = \frac{n + m}{m - p} X_3 - \frac{n + p}{m - p} X_1 = \frac{m}{m - p} A - \frac{p}{m - p} C.$$

$$C_1 = \frac{p + n}{n - m} X_1 - \frac{p + m}{n - m} X_2 = \frac{n}{n - m} B - \frac{m}{n - m} A.$$

Die letzten Formeln kann man auch schreiben:

$$(p - n) A_1 = p C - n B;$$

$$(m - p) B_1 = m A - p C;$$

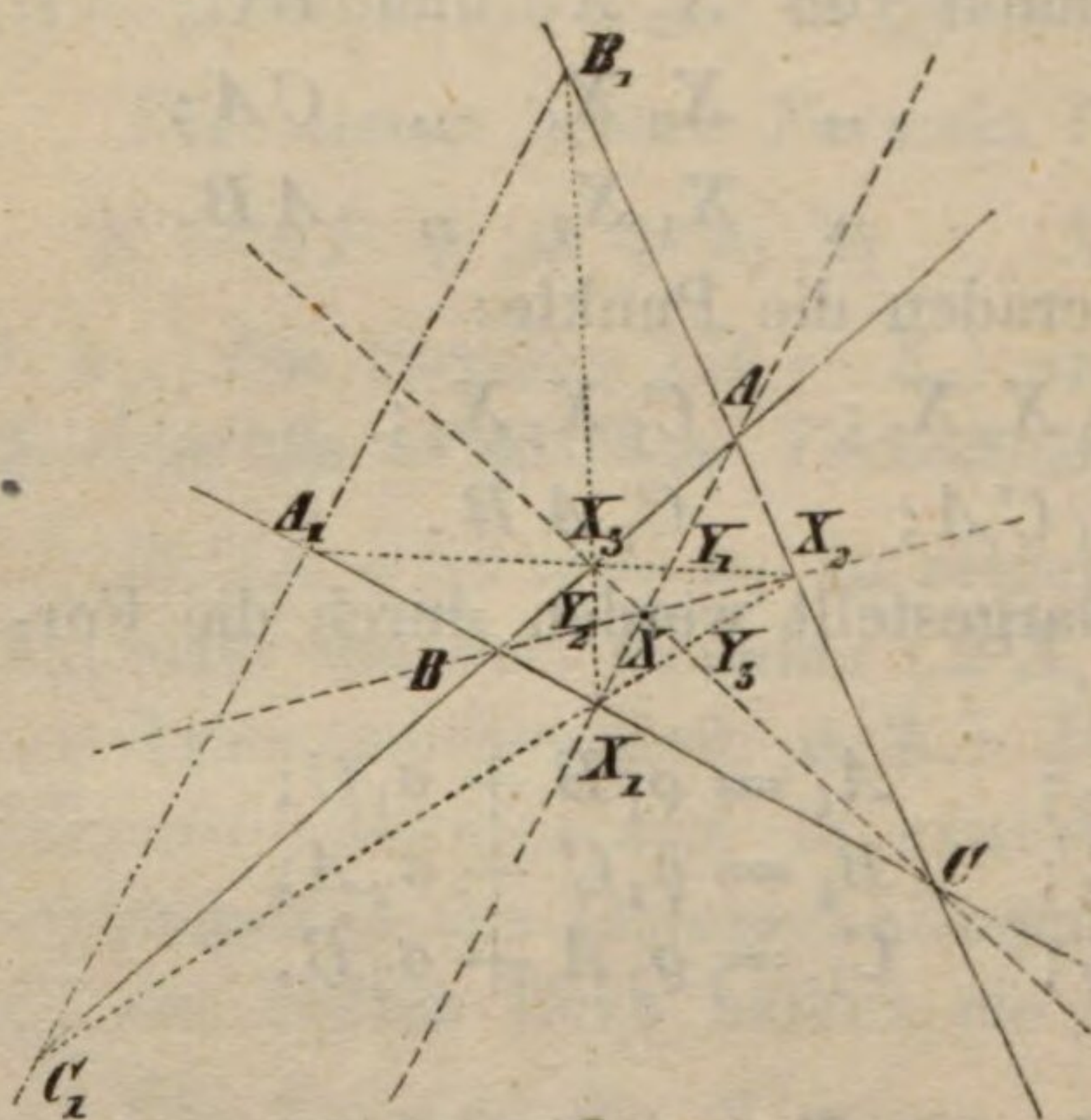
$$(n - m) C_1 = n B - m A;$$

addirt:

$$(p - n) A_1 + (m - p) B_1 + (n - m) C_1 = 0;$$

d. h.: Die drei Punkte $A_1 B_1 C_1$ liegen in derselben Geraden.

118. *Specielle Fälle.* 1) Von den drei Zahlen $m n p$ seien zwei, z. B. n und p , einander gleich; dann wird der Durchschnittspunkt A_1 ($=\infty$) unbestimmbar; d. h. $X_2 X_3$ und BC sind parallel.



2) Ist $n = p = m$, so ist:

$$X_2 X_3 \parallel BC;$$

$$X_1 X_3 \parallel AC;$$

$$X_1 X_2 \parallel AB;$$

d. h.: Die Verbindungs-
linien der Fusspunkte der
Transversalen sind den Sei-

ten des Dreiecks parallel.

119. Durch Addition der Ausdrücke für X_2 und X_3 erhält man:

$(m + p) X_2 + (m + n) X_3 = 2 m A + n B + p C = X + m A$;
oder:

$$\frac{m + n}{m + 1} X_3 + \frac{m + p}{m + 1} X_2 = \frac{m}{m + 1} A + \frac{1}{m + 1} X.$$

Setzen wir diese Ausdrücke gleich Y_1 , so ist Y_1 der Durchschnittspunkt der Geraden $X_2 X_3$ und $A X$. Also, wenn wir analog auch Y_2 und Y_3 einführen:

$$Y_1 = \frac{m}{m + 1} A + \frac{1}{m + 1} X;$$

$$Y_2 = \frac{n}{n + 1} B + \frac{1}{n + 1} X;$$

$$Y_3 = \frac{p}{p + 1} C + \frac{1}{p + 1} X.$$

Die letzten Formeln geben durch äussere Multiplication mit resp. A , B , C und X :

$$A Y_1 = \frac{1}{m + 1} A X; \quad X Y_1 = \frac{m}{m + 1} X A;$$

$$B Y_2 = \frac{1}{n + 1} B X; \quad X Y_2 = \frac{n}{n + 1} X B;$$

$$C Y_3 = \frac{1}{p + 1} C X; \quad X Y_3 = \frac{p}{p + 1} X C;$$

oder durch Division:

$$\frac{A Y_1}{Y_1 X} = \frac{1}{m}; \quad \frac{B Y_2}{Y_2 X} = \frac{1}{n}; \quad \frac{C Y_3}{Y_3 X} = \frac{1}{p}.$$

Andererseits ist aber auch:

$$\frac{A X_1}{X X_1} = \frac{1}{m}; \quad \frac{B X_2}{X X_2} = \frac{1}{n}; \quad \frac{C X_3}{X X_3} = \frac{1}{p}.$$

Eine gegebene Strecke ($A - X$) ist also auf *doppelte* Weise in einem gegebenen Verhältnisse ($1 : m$) theilbar. — Es ist nun:

$$A Y_1 : Y_1 X = A X_1 : X X_1;$$

$$B Y_2 : Y_2 X = B X_2 : X X_2;$$

$$C Y_3 : Y_3 X = C X_3 : X X_3.$$

Zwei Punkte (X_1, Y_1), welche eine gegebene Strecke ($A - X$) in gleichem Verhältnisse theilen, heissen *harmonisch* mit den Endpunkten der Strecke. — Da auch

$$A Y_1 : A X_1 = Y_1 X : X X_1,$$

so wird auch die Strecke ($X_1 - Y_1$) von den Punkten A und X harmonisch getheilt. Man nennt daher alle vier

Punkte ohne Unterschied harmonische, aber A und X , sowie X_1 und Y_1 einander zugeordnete (*conjugirte*). —

Harmonische Punkte sind also in unserer Figur:

$$(A Y_1 X X_1), \quad (B Y_2 X X_2), \quad (C Y_3 X X_3).$$

Multiplicirt man

$$C_1 = \frac{n}{n-m} B - \frac{m}{n-m} A$$

mit A und B , so folgt:

$$C_1 B = -\frac{m}{n-m} AB \quad ; \quad C_1 A = \frac{n}{n-m} BA;$$

also:

$$C_1 B : C_1 A = m : n.$$

Multiplicirt man andererseits

$$X_3 = \frac{m}{m+n} A + \frac{n}{m+n} B$$

mit A und B , so folgt:

$$X_3 B = \frac{m}{m+n} AB \quad ; \quad A X_3 = \frac{n}{m+n} AB;$$

also:

$$X_3 B : A X_3 = m : n;$$

folglich:

$$C_1 B : C_1 A = X_3 B : A X_3;$$

d. h.: auch die Strecke $(A - B)$ wird durch die Punkte C_1 und X_3 harmonisch getheilt.

Die vom Punkte X_2 durch die harmonischen Punkte A , Y_1 , X_1 , X gezogenen Geraden schneiden also auch die Gerade (AB) in harmonischen Punkten. Und da sowohl der Punkt X_2 , als die Gerade (AB) (abgesehen vom Punkte A) von der Lage der vier Punkte (AXY_1X_1) unabhängig sind, so hat man den Satz: *Die aus einem beliebigen Punkte der Ebene durch vier harmonische Punkte gezogenen Geraden schneiden jede beliebige durch einen derselben gezogene Gerade ebenfalls in harmonischen Punkten.*

Die aus einem Punkte der Ebene durch vier harmonische Punkte gezogenen Geraden heissen daher *harmonische Stralen*.

Specieller Fall. Sind zwei der Zahlen m , n , p , z. B. m und n , einander gleich, so ist $C_1 = \infty$, d. h. unbestimmbar; und die Geraden $(X_2 X_1)$ und (AB) sind parallel. Dann ist aber $X_3 = \frac{A+B}{2}$; d. h.: die von einem beliebigen Punkte der Ebene nach den Endpunkten, dem Mittelpunkte einer Strecke und parallel mit ihr gezogenen Geraden sind harmonisch.

Aufgaben: 1) Zu beweisen, dass die Mitten der Diagonalen eines vollständigen Vierecks in einer Geraden liegen.

In 114. ist, wenn $ABCX$ die Ecken des Vierecks, und $(A - B)$, $(C - X)$, $(X_1 - X_2)$ die drei Diagonalen sind:

$$M_1 = \frac{A + B}{2}; \quad M_2 = \frac{C + X}{2}; \quad M_3 = \frac{(X_1 + X_2)}{2}.$$

Es ist zu zeigen, dass zwischen $M_1 M_2 M_3$ eine Zahlbeziehung existirt. Nun hat man:

$$2 M_1 = A + B;$$

$$2 M_2 = m A + n B + (p + 1) C;$$

$$2 M_3 = \frac{m(n + p) A + n(p + m) B + [2 p^2 + (m + n) p] C}{(m + p)(n + p)};$$

oder, da $m + n + p = 1$ ist:

$$\begin{aligned} 2(1 - m)(1 - n) M_3 &= m(1 - m) A + n(1 - n) B + p(1 + p) C \\ &= m(1 - m) A + n(1 - n) B + p(2 M_2 - m A - n B) \\ &= m(1 - m - p) A + n(1 - n - p) B + 2 p M_2 \\ &= m n (A + B) + 2 p M_2 \\ &= 2 m n M_1 + 2 p M_2; \end{aligned}$$

oder:

$$(1 - m)(1 - n) M_3 = m n M_1 + p M_2; \quad \text{w. z. b. w.}$$

2) Zieht man in einem Dreieck ABC aus den Ecken 121. drei Geraden, die sich in einem Punkte P schneiden, und aus den Mitten der drei Seiten des Dreiecks Parallelen mit den Theilungslinien der gegenüberliegenden Winkel, so schneiden sich diese Parallelen gleichfalls in einem Punkte π ; ferner liegt der Mittelpunkt S des Dreiecks mit π und P in gerader Linie, und zwar von ersterem halb so weit entfernt, als vom letzteren.

Man hat:

$$S = \frac{A + B + C}{3};$$

sei nun:

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C; \quad (\alpha + \beta + \gamma = 1);$$

ferner:

$$\pi = \alpha \frac{(B + C)}{2} + \beta \frac{(C + A)}{2} + \gamma \frac{(A + B)}{2}.$$

Dann ist einerseits:

$$\alpha (P - A) + \beta (P - B) + \gamma (P - C) = 0;$$

andererseits:

$$\alpha \left(\pi - \frac{B+C}{2} \right) + \beta \left(\pi - \frac{C+A}{2} \right) + \gamma \left(\pi - \frac{A+B}{2} \right) = 0.$$

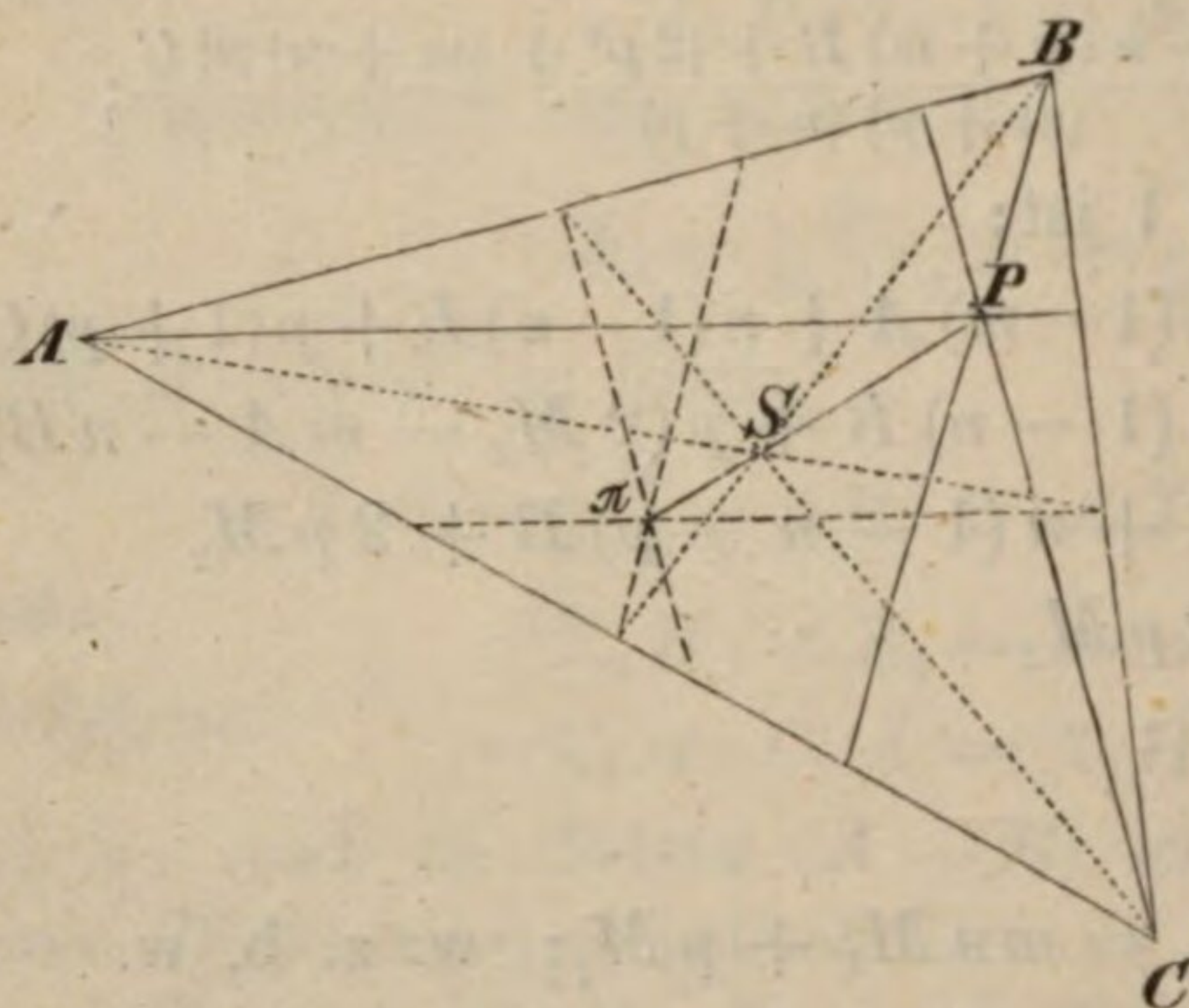
Daraus folgt:

$$(P - A) = \lambda \left(\pi - \frac{B+C}{2} \right);$$

$$(P - B) = \lambda \left(\pi - \frac{C+A}{2} \right);$$

$$(P - C) = \lambda \left(\pi - \frac{A+B}{2} \right);$$

d. h.: Der Punkt π , welcher aus den Mitten der Seiten des Dreiecks durch dieselben Zahlen abgeleitet wurde, wie P aus



den Ecken, ist der Durchschnittspunkt der Parallelen, welche aus den Mitten der Seiten zu den aus den Ecken gezogenen Geraden construirt sind.

Ferner ist

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{(\beta + \gamma)}{2} \cdot A \\ &+ \frac{(\gamma + \alpha)}{2} \cdot B \\ &+ \frac{(\alpha + \beta)}{2} \cdot C; \end{aligned}$$

also:

$$2\pi + P = 3S;$$

d. h.: π , P und S liegen in derselben Geraden, und:

$$P - S = 2(S - \pi);$$

d. h.: S ist doppelt soweit von P entfernt, wie von π ; w. z. b. w.

Stehen die Parallelenpaare auf den zugehörigen Seiten senkrecht, so ist P der Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks, und π der Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises.

122. 3) Zieht man in der Ebene eines Dreiecks eine beliebige Gerade, welche die Seiten des Dreiecks in drei Punkten schneidet, so sind die Producte derjenigen drei Abschnitte auf den Seiten, welche keinen gemeinsamen Endpunkt haben, einander gleich.

Betrachtet man in der Figur S. 76 ($A X_3 X$) als gegebenes Dreieck, und BC als Linie, welche die Seiten $A X_3$, $X_3 X$, XA resp. in B , C , X_1 schneidet, so ist

$$\frac{X_3 B}{AB} = \frac{m}{m+n}; \quad \frac{XC}{X_3 C} = \frac{m+n}{1}; \quad \frac{AX_1}{XX_1} = \frac{1}{m};$$

also:

$$\frac{(X_3 B)(XC)(AX_1)}{(AB)(X_3 C)(XX_1)} = 1,$$

oder:

$$(X_3 B)(XC)(AX_1) = (AB)(X_3 C)(XX_1).$$

4) In derselben Figur ist (S. 76):

123.

$$\frac{XX_1}{AX_1} + \frac{XX_2}{BX_2} + \frac{XX_3}{CX_3} = m + n + p = 1;$$

$$\frac{AX}{AX_1} + \frac{BX}{BX_2} + \frac{CX}{CX_3}$$

$$= (1 - m) + (1 - n) + (1 - p) = 3 - (m + n + p) = 2.$$

Die Uebertragung in Worte ist leicht.

5) Haben zwei Dreiecke eine solche Lage, dass die Verbindungs-
bindungs-
linien dreier Eckenpaare sich in einem Punkte schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte der drei Paare jenen Ecken gegenüberliegender Seiten in einer geraden Linie.

Man hat:

$$X_1 - X = \lambda(X - A);$$

$$X_2 - X = \mu(X - B);$$

$$X_3 - X = \nu(X - C);$$

oder:

$$X(1 + \lambda) = X_1 + \lambda A;$$

$$X(1 + \mu) = X_2 + \mu B;$$

$$X(1 + \nu) = X_3 + \nu C;$$

also:

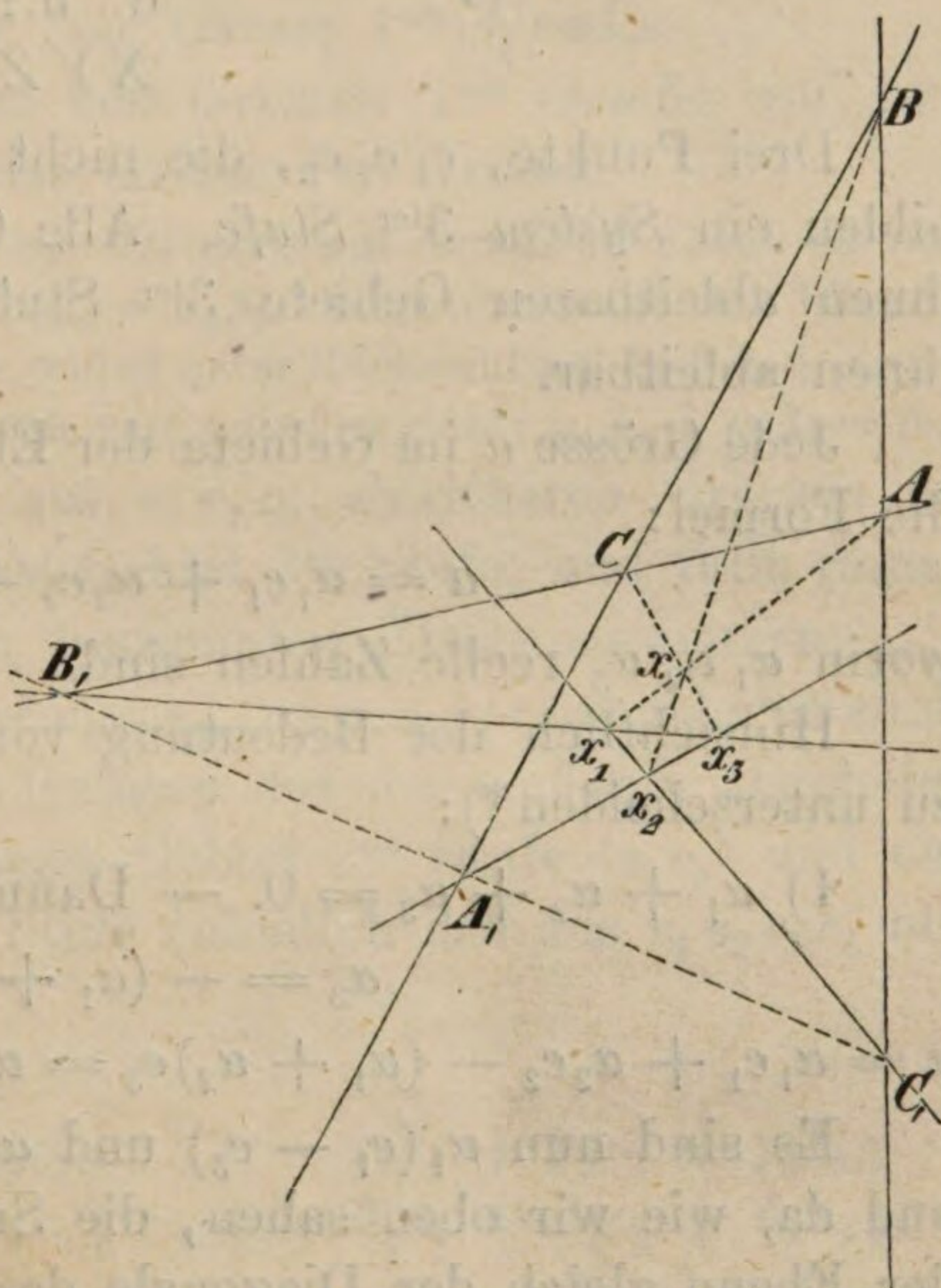
$$\begin{aligned} \frac{X_1 + \lambda A}{1 + \lambda} &= \frac{X_2 + \mu B}{1 + \mu} \\ &= \frac{X_3 + \nu C}{1 + \nu}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{X_2}{1 + \mu} - \frac{X_3}{1 + \nu} \\ &= \frac{\nu C}{1 + \nu} - \frac{\mu B}{1 + \mu}; \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{X_3}{1 + \nu} - \frac{X_1}{1 + \lambda} = \frac{\lambda A}{1 + \lambda} - \frac{\nu C}{1 + \nu};$$

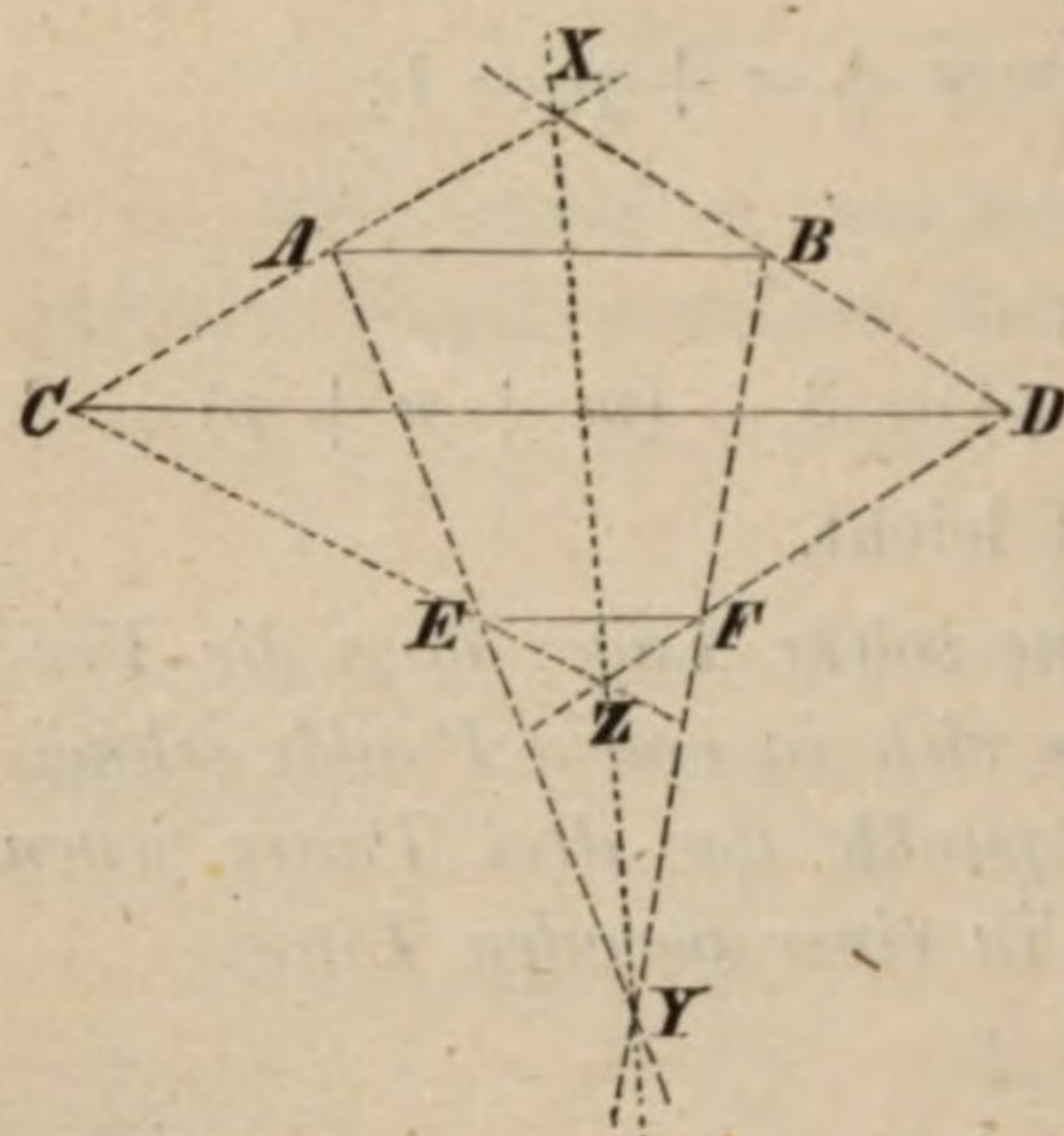
$$C_1 = \frac{X_1}{1 + \lambda} - \frac{X_2}{1 + \mu} = \frac{\mu B}{1 + \mu} - \frac{\lambda A}{1 + \lambda};$$



so folgt: $A_1 + B_1 + C_1 = 0$;

d. h.: die vielfachen Punkte $A_1 B_1 C_1$ liegen in gerader Linie.

125. 6) Verbindet man paarweise die drei Anfangs- und die drei Endpunkte von drei gleich gerichteten Strecken, so liegen die Durchschnittspunkte der entsprechenden Linienpaare in gerader Linie.



Man hat:

$$\alpha(A - B) = \beta(C - D) \\ = \gamma(E - F).$$

Setzt man nun:

$$X = \alpha A - \beta C = \alpha B - \beta D;$$

$$Y = \gamma E - \alpha A = \gamma F - \alpha B;$$

$$Z = \beta C - \gamma E = \beta D - \gamma F;$$

so ist:

$$X + Y + Z = 0;$$

d. h.: die vielfachen Punkte XYZ liegen in gerader Linie.

126. Drei Punkte, $e_1 e_2 e_3$, die nicht in einer Geraden liegen, bilden ein *System 3^{ter} Stufe*. Alle Grössen, die in dem aus ihnen ableitbaren Gebiete 3^{ter} Stufe vorkommen, sind aus ihnen ableitbar.

Jede Grösse a im Gebiete der Ebene ist darstellbar durch die Formel:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

worin $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ reelle Zahlen sind.

Hinsichtlich der Bedeutung von a sind nun zwei Fälle zu unterscheiden*):

1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. — Dann ist:

$$\alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) e_3 = \alpha_1 (e_1 - e_3) + \alpha_2 (e_2 - e_3).$$

Es sind nun $\alpha_1 (e_1 - e_3)$ und $\alpha_2 (e_2 - e_3)$ zwei Strecken; und da, wie wir oben sahen, die Summe zweier Strecken in der Ebene gleich der Diagonale des aus diesen Strecken gebildeten Parallelogramms ist, so ist a in diesem Falle eine *Strecke*.

*) Vgl. G. A. II. 222.

2) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0$. — Sei e_4 ein anderer Punkt der Ebene, so ist

$$a - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_4 = \alpha_1(e_1 - e_4) + \alpha_2(e_2 - e_4) + \alpha_3(e_3 - e_4).$$

Auf der rechten Seite steht die Summe dreier Strecken, d. h. eine Strecke; es muss also a ein Punkt mit dem Coefficienten $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ sein.

Es kann also jede Grösse ersten Grades in der Ebene aus drei festen Punkten vermittelt einer linearen Gleichung abgeleitet werden.

Für Grössen 1^{ten} Grades gelten auch in der Ebene alle Gesetze der Rechnung mit Summen von Produkten. Es ist also:

$$\delta \cdot a = (\alpha_1 \delta) e_1 + (\alpha_2 \delta) e_2 + (\alpha_3 \delta) e_3;$$

$$a : \delta = (\alpha_1 : \delta) e_1 + (\alpha_2 : \delta) e_2 + (\alpha_3 : \delta) e_3;$$

ferner, wenn $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ ist:

$$a \pm b = (\alpha_1 \pm \beta_1) e_1 + (\alpha_2 \pm \beta_2) e_2 + (\alpha_3 \pm \beta_3) e_3;$$

d. h.: *Produkt und Quotient aus einer Grösse 1^{ten} Grades und einer Zahl ist wieder eine Grösse 1^{ten} Grades.*

Summe und Differenz von Grössen 1^{ten} Grades auf derselben Ebene ist wieder eine Grösse 1^{ten} Grades.

Anm. Der Quotient zweier Strecken auf derselben Ebene ist nur dann eine reelle Zahl, wenn $\alpha_1 \beta_2 = \alpha_2 \beta_1$. Man überzeugt sich hiervon durch Ausführung der Division, wobei unter Rücksicht auf $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ und $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ sich noch von selbst ergibt: $\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1 = 0$.

Der Inbegriff aller aus $e_1 e_2 e_3$ ableitbaren Grössen ist ihr Gebiet. Dasselbe heisst Gebiet 3^{ter} Stufe, und fällt räumlich mit der durch $e_1 e_2 e_3$ bestimmten Ebene zusammen.

Zwei Ebenen, die aus $e_1 e_2 e_3$, resp. $e_2 e_3 e_4$ abgeleitet sind, so dass keine dieser vier Grössen aus den anderen abgeleitet ist, haben ein gemeinsames Gebiet 2^{ter} Stufe ($e_2 e_3$) und ein verbindendes Gebiet 4^{ter} Stufe (nämlich das aus $e_1 e_2 e_3 e_4$ abgeleitete).

Wenn

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3; \quad c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3;$$

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3; \quad d = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

so erhält man durch Elimination von $e_1 e_2 e_3$ *) eine lineare

*) Diese *Elimination* lässt sich mit Hilfe der äusseren Multiplication auf folgende Weise bewerkstelligen: Man multiplicire die vier Gleichungen resp. mit den vier unabhängigen Grössen $e'' e' e''' e''''$, addire

Gleichung zwischen a, b, c, d , welche Grössen Punkte oder Strecken sein können. Es besteht also zwischen vier Grössen 1^{ten} Grades auf einer Ebene stets eine Zahlbeziehung. — Jede dieser vier Grössen kann also aus den drei übrigen abgeleitet werden. — Die speciellen Fälle, welche sich hierbei ergeben, sind folgende:

Strecken:	Punkte:	Ableitung			
		von	aus	von	aus
1) —	$a b c d$	—	—	1 Pkt.	3 Pkt.
2) a	$b c d$	1 Str.	3 Pkt.	1 Pkt.	1 Str. 2 Pkt.
3) $a b$	$c d$	1 Str.	1 Str. 2 Pkt.	1 Pkt.	2 Str. 1 Pkt.
4) $a b c$	d	1 Str.	2 Str. 1 Pkt.	1 Pkt.	3 Str.
5) $a b c d$	—	1 Str.	3 Str.	—	—

Es kann also eine Grösse 1^{ten} Grades im Gebiet der Ebene abgeleitet werden: 1. aus drei Punkten; 2. aus zwei Punkten und einer Strecke; 3. aus einem Punkte und zwei Strecken; 4. aus drei Strecken.

Anm. Drei feste Grössen 1^{ten} Grades in einer Ebene, aus denen andere abgeleitet werden, heissen ein *Coordinatensystem*.

b) Grössen vom 2^{ten} Grade.

α) Differenz von Linientheilen.

129. Wenn ε_1 und ε_2 zwei durch Lagenänderung aus einander entstandene Linientheile sind, so verstehen wir unter $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ die zwischen ε_1 als Anfangs- und ε_2 als Endlinie liegende Parallelogrammfläche; $\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ ist das δ fache dieser Fläche; und da

$$\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \delta \varepsilon_1 - \delta \varepsilon_2,$$

die vier Gleichungen, setze die linke Seite gleich a_0 , und rechts die Coefficienten von $e_1 e_2 e_3$ resp. gleich $a_1 a_2 a_3$; dann heisst die Gleichung:

$$a_0 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3.$$

Endlich multiplicire man die ganze Gleichung mit $(a_1 a_2 a_3)$; dann wird die rechte Seite Null, und es bleibt:

$$a_0 \cdot a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Löst man hier die Klammern, und bringt jedes Glied durch Zeichenwechsel auf den Factor $(e^0 \cdot e' \cdot e'' \cdot e''')$, den man schliesslich weglassen kann, so erhält man die Eliminationsgleichung in gewöhnlicher Gestalt. (Vgl. G. A. II. 135.)

so ändert sich ein Parallelogramm in demselben Masse als eine seiner Seiten sich ändert; d. h.: *Parallelogramme zwischen denselben Parallelen verhalten sich wie ihre Grundlinien.*

Wenn

$$A = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

und

$$(e_1 - e_3) = (e_2 - e_4) = (A - B),$$

so ist:

$$A(A - B) = \alpha_1 e_1(e_1 - e_3) + \alpha_2 e_2(e_2 - e_4)$$

oder:

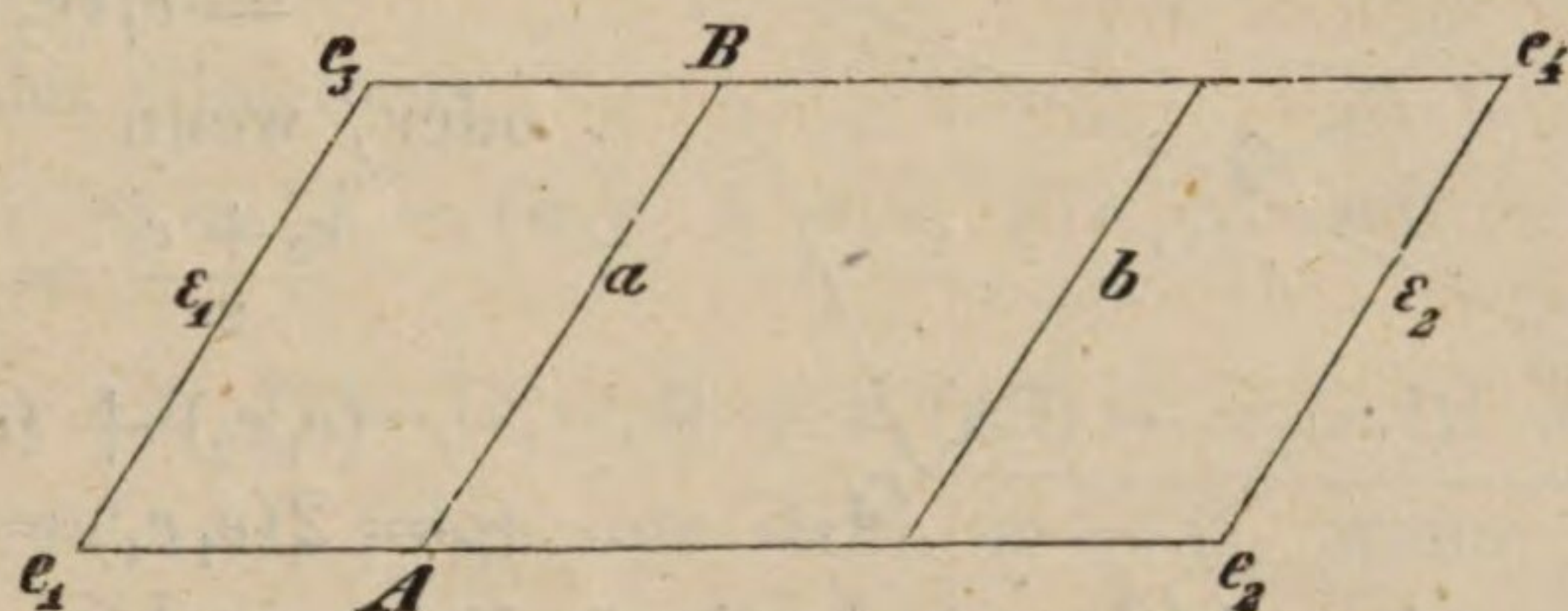
$$(AB) = \alpha_1(e_1 e_3) + \alpha_2(e_2 e_4);$$

oder, wenn wir $(AB) = a$; $e_1 e_3 = \varepsilon_1$; $e_2 e_4 = \varepsilon_2$ setzen:

$$a = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2.$$

Diese Formel zeigt, wie ein Linientheil aus einem anderen gleich grossen und gleich gerichteten abgeleitet werden kann.*)

Sind ε_1 und ε_2 numerisch gleich der Längeneinheit, so stellt a einen einfachen oder vielfachen Linientheil dar, je



nachdem $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ oder n ist. — Sind im ersten Falle α_1 und α_2 beide < 1 , so sind beide positiv, und wir sagen, a liege zwischen ε_1 und ε_2 . Alle einfachen Linientheile, welche dieser Bedingung genügen, liegen im Parallelogramm $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. — Ist aber $\alpha_1 > 1$ und positiv, so ist α_2 negativ, und a liegt ausserhalb des Parallelogramms.

Sei ein anderer Linientheil von gleicher Länge und Richtung gegeben:

$$b = \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 \quad ; \quad (\beta_1 + \beta_2 = 1);$$

so ist:

$$a - b = (\alpha_1 - \beta_1) \varepsilon_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \varepsilon_2;$$

oder, wenn

$$\alpha_1 - \beta_1 = \gamma_1 \quad ; \quad \alpha_2 - \beta_2 = \gamma_2,$$

woraus folgt:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0;$$

so ist:

$$a - b = \gamma_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \varepsilon_2;$$

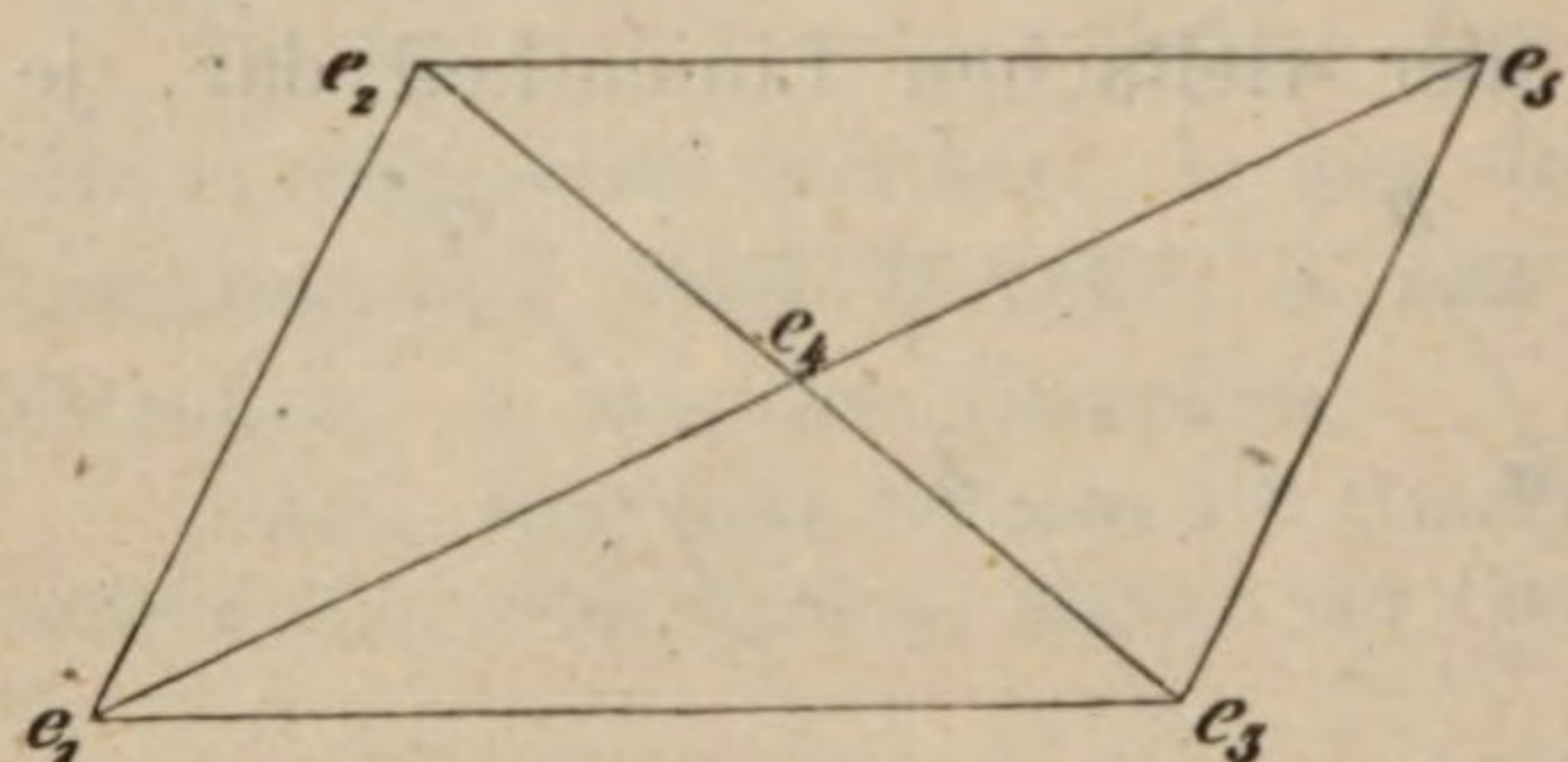
*) Vgl. G. A. II. 274.

d. h.: wenn $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, so stellt der Ausdruck $\gamma_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \varepsilon_2$ ein Parallelogramm dar.

Ist also $a = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2$, so stellt a einen Linientheil oder ein Parallelogramm dar, je nachdem $\alpha_1 + \alpha_2$ ungleich oder gleich Null. Da a aus den Grössen e durch eine Gleichung 2^{ten} Grades abgeleitet ist, so sind Linientheile und Parallelogramme Grössen vom 2^{ten} Grade.

130. Für Grössen 2^{ten} Grades gelten nun alle Gesetze der Rechnung mit Summen von Producten, wie oben (S. 13) für die Grössen 1^{ten} Grades. Man hat nur in den dortigen Formeln e durch ε zu ersetzen.

Speciell zu betrachten ist nur noch die Addition von Linientheilen mit verschiedener Richtung.*) Seien nun $(e_1 e_2)$ (und $e_1 e_3$) zwei solche Linientheile, so hat man:



$$\begin{aligned} (e_1 e_2) + (e_1 e_3) &= e_1 (e_2 + e_3), \\ \text{oder, wenn} & \\ \frac{e_2 + e_3}{2} &= e_4; \\ (e_1 e_2) + (e_1 e_3) &= 2(e_1 e_4) = e_1 e_5, \end{aligned}$$

wenn $(e_1 - e_4) = (e_4 - e_5)$, weil nämlich aus $2(e_1 e_4) = e_1 e_5$ folgt:

$$\begin{aligned} e_1 e_4 &= e_1 (e_5 - e_4) \\ \text{oder:} & \\ e_1 (e_4 - e_1) &= e_1 (e_5 - e_4). \end{aligned}$$

Die Summe zweier von einem Punkte ausgehenden Linientheile ist also gleich der von demselben Punkte ausgehenden Diagonale des zugehörigen Parallelogramms.

131. Der Inbegriff aller aus ε_1 und ε_2 ableitbaren Grössen ist ihr Gebiet. Da ε_1 und ε_2 von 2^{ter} Stufe sind, da ferner $\varepsilon_1 = (e_1 e_3)$ und $\varepsilon_2 = (e_2 e_4)$ und da endlich zwischen $e_1 e_2 e_3 e_4$ die Zahlbeziehung bestand: $(e_1 - e_3) = (e_2 - e_4)$, so ist dieses Gebiet von 3^{ter} Stufe, und fällt räumlich mit der durch ε_1 und ε_2 bestimmten Ebene zusammen.

Wenn

$$a_1 = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2; \quad b_1 = \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2; \quad c_1 = \gamma_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \varepsilon_2,$$

*) Vgl. G. A. II. 273.

so lassen sich ε_1 und ε_2 eliminiren, und man erhält zwischen $a_1 b_1 c_1$ eine Zahlbeziehung, wie oben, wo e_1 und e_2 eliminirt wurden.

Zwischen drei Grössen 2^{ter} Stufe auf einer Ebene, seien es nun Parallelogramme oder parallele Linientheile, besteht also stets eine Zahlbeziehung, und aus je zwei dieser Grössen kann man eine dritte ableiten.

Aus der Gleichung $A = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ folgte oben durch 132. Multiplication mit der Strecke $(A - B) = l$ die Gleichung $a = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2$. — Dadurch erhält man den Satz, dass eine Gleichung zwischen Punkten ungeändert bleibt, wenn man alle Punkte mit gleich gerichteten Strecken (l) multiplicirt.*) Derselbe ist von der Anzahl und Lage der Punkte in der Ebene unabhängig, gilt also namentlich auch für die Gleichung $A = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, wo $e_1 e_2 e_3$ drei beliebige Punkte der Ebene sind. —

Aus der Gleichung

$$m = A - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = 0$$

folgt also:

$$m l = (A \cdot l) - [\alpha_1 (e_1 l) + \alpha_2 (e_2 l) + \alpha_3 (e_3 l)] = 0.$$

Aber aus $ml = 0$ folgt nur dann $m = 0$, wenn m und l zwei verschiedenen, von einander unabhängigen Systemen angehören, weil das Product zweier abhängigen Grössen auch dann Null ist, wenn keine der Grössen selbst gleich Null ist.

Setzen wir also:

$$A \cdot l = A' l; \quad e_1 l = e_1' l; \quad e_2 l = e_2' l; \quad e_3 l = e_3' l,$$

wodurch die letzte Gleichung übergeht in

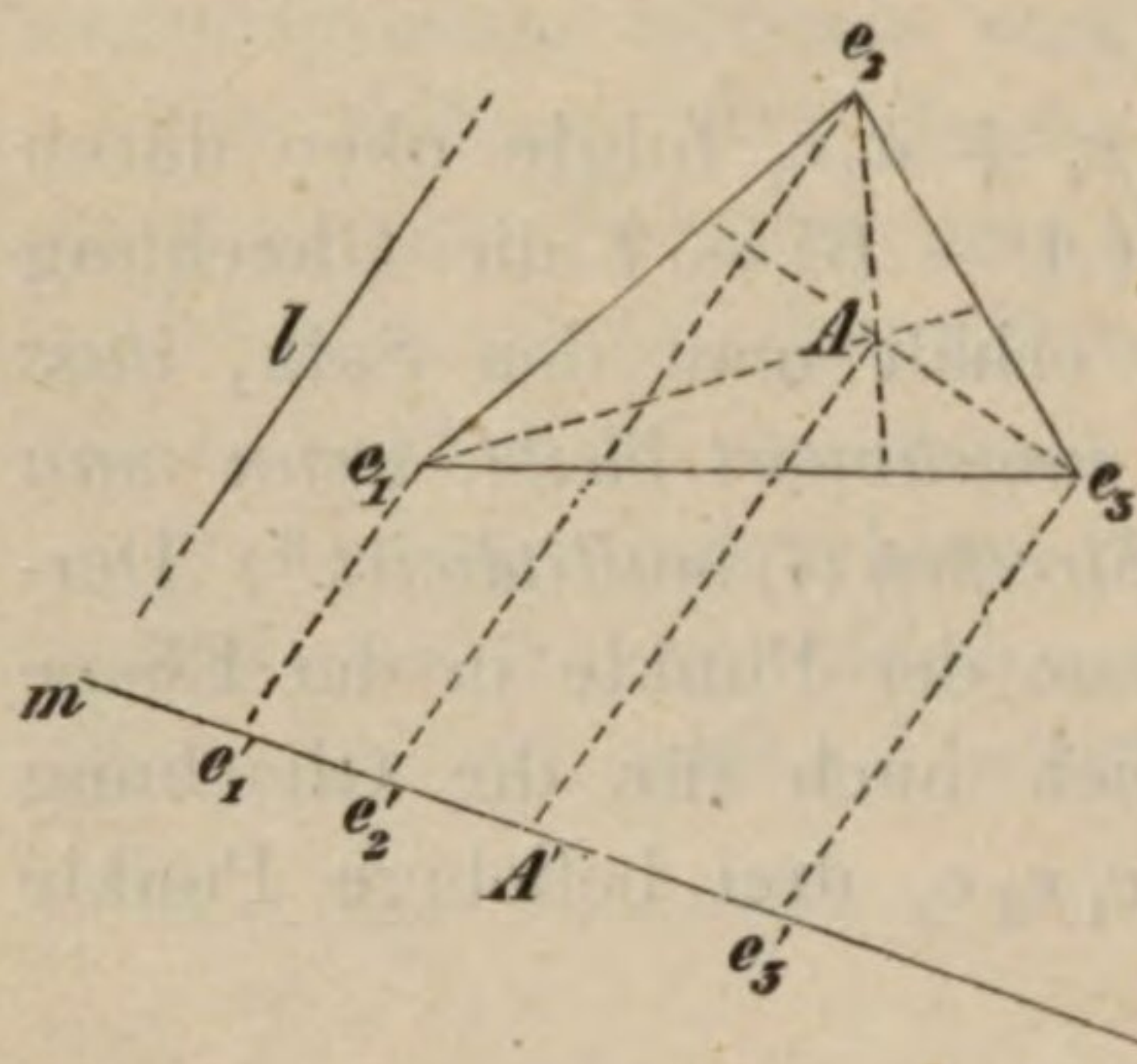
$$m l = (A' l) - [\alpha_1 (e_1' l) + \alpha_2 (e_2' l) + \alpha_3 (e_3' l)] = 0,$$

so wird, wenn die Punkte $A' e_1' e_2' e_3'$ in derselben Ebene mit l liegen, also durch m eine Ebene dargestellt wird, in der l liegt, ml von selbst gleich Null sein, als Product abhängiger Grössen. Liegen jene Punkte aber in einer Geraden, so sind die durch m und l dargestellten Geraden von einander unabhängig, mithin $m = 0$, oder:

$$A' = \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \alpha_3 e_3'.$$

*) Vgl. G. A. I. § 80—86.

Man nennt nun $A'e_1'e_2'e_3'$ die *Projectionen* der Grössen $Ae_1e_2e_3$ auf die Gerade m , nach l ; ferner heisst m das *Grundsystem*, das System, auf dem l liegt, das *Leitsystem* der Projection. Und die letzte Formel drückt den Satz aus: *Jede zwischen Grössen 1^{ten} Grades geltende Gleichung bleibt bestehen, wenn man diese Grössen auf eine Gerade projicirt.*



Ist A eine Strecke, so ist A' deren Projection. — Setzen wir z. B.:

$\alpha_1 = +1$; $\alpha_2 = -1$; $\alpha_3 = 0$; so ist:

$$A = e_1 - e_2;$$

$$A' = e_1' - e_2';$$

d. h.: *Die Projection einer Strecke ist gleich der Strecke zwischen den Projectionen ihrer*

Endpunkte. — Ist $A \cdot l = 0$, so ist auch $A'l = 0$, mithin, da A' und l von einander unabhängig sind: $A' = 0$; d. h.: *Die Projection einer Strecke, welche die Richtung des Leitsystems hat, ist Null.* — Ist $e_1 - e_2 = e_1' - e_2'$, so ist $A = A'$; d. h.: *Eine Strecke, welche dem Grundsystem parallel ist, bleibt durch Projection ungeändert.*

Ist g eine beliebige Strecke auf dem Grundsystem, so wird sein

$$A' = x \cdot g,$$

worin A' die Projection der Strecke A , und x eine Zahl ist. Hieraus folgt:

$$(A'l) = x(gl)$$

oder:

$$(A'l) = x(gl);$$

d. h.: da der Quotient zweier Grössen 2^{ter} Stufe in einer Ebene eine Zahl ist:

$$x = \frac{(A'l)}{(gl)};$$

und:

$$A' = \frac{(A'l)}{(gl)} \cdot g.$$

Projicirt man die Grössen $Ae_1e_2e_3$ zweitens auf l nach m , so erhält man eine zweite Gleichung:

$$A'' = \alpha_1 e_1'' + \alpha_2 e_2'' + \alpha_3 e_3''.$$

Wenn nun O der Schnittpunkt der Geraden l und m ist, so bilden $l m O$ ein *Coordinaten-System*, in welchem O der Anfangspunkt heisst, und l und m die *Axen*. Die Grösse A ist dann durch ihre beiden *Projectionen* auf die *Axen* vollständig bestimmt; denn es ist

$$A'O + A''O = AO.$$

Ebenso wird jede Gleichung zwischen Grössen 1^{ten} Grades ersetzt durch die beiden Gleichungen, welche man erhält, wenn man statt der Grössen nach einander ihre *Projectionen* auf die beiden *Axen* setzt.

Da

$$A - O = (A - A') + (A - A''),$$

so ist die Entfernung des Punktes A vom Anfangspunkte O einfach als Summe zweier Strecken dargestellt, die man *Coordinaten* von A nennt.

Ist nun A jene Strecke, und $A'A''$ die zu ihrem Endpunkte gehörigen *Coordinaten*, so ist:

$$A' = \frac{(Al)}{(gl)} \cdot g; \quad A'' = \frac{(Ag)}{(lg)} \cdot l,$$

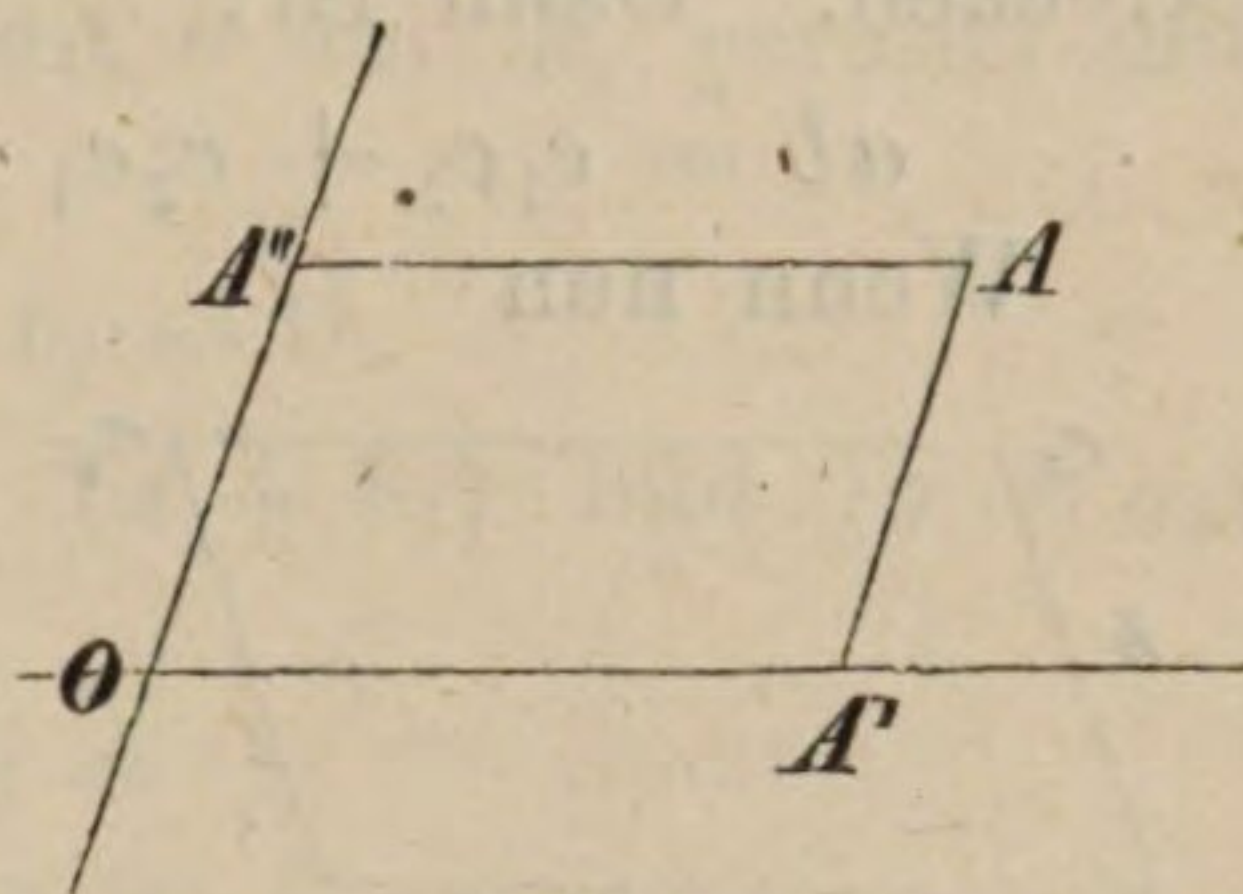
wo l und g beliebige aber feste Strecken auf den gleichnamigen *Axen* bedeuten. Die Quotienten $\frac{(Al)}{(gl)}$ und $\frac{(Ag)}{(lg)}$ heissen die zu A' resp. A'' gehörigen *Zeiger*.

Sind l' und g' zwei andere *Coordinatenaxen*, welche als Vielfachensummen der vorigen gegeben sind, so ist in Bezug auf diese der eine *Zeiger*: $\frac{(Al')}{(g'l')}$; der andere: $\frac{(Ag')}{(l'g')}$, wodurch die Aufgabe der *Coordinatenverwandlung* gelöst ist.

Aufgabe: Zu beweisen: Ist ein Dreieck und eine beliebige Gerade gegeben, und zieht man von den Ecken des Dreiecks und seinem Mittelpunkte parallele Strecken bis zur gegebenen Geraden, so ist die vom Mittelpunkte gezogene Strecke gleich dem dritten Theile der Summe der übrigen.

Ist A der Mittelpunkt der drei Punkte $e_1 e_2 e_3$, so ist:

$$A = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{3};$$



sind ferner $A'e_1'e_2'e_3'$ die Projectionen der vier Punkte auf die Gerade, so ist:

$$A' = \frac{e_1' + e_2' + e_3'}{3};$$

mithin:

$$(A - A') = \frac{(e_1 - e_1') + (e_2 - e_2') + (e_3 - e_3')}{3};$$

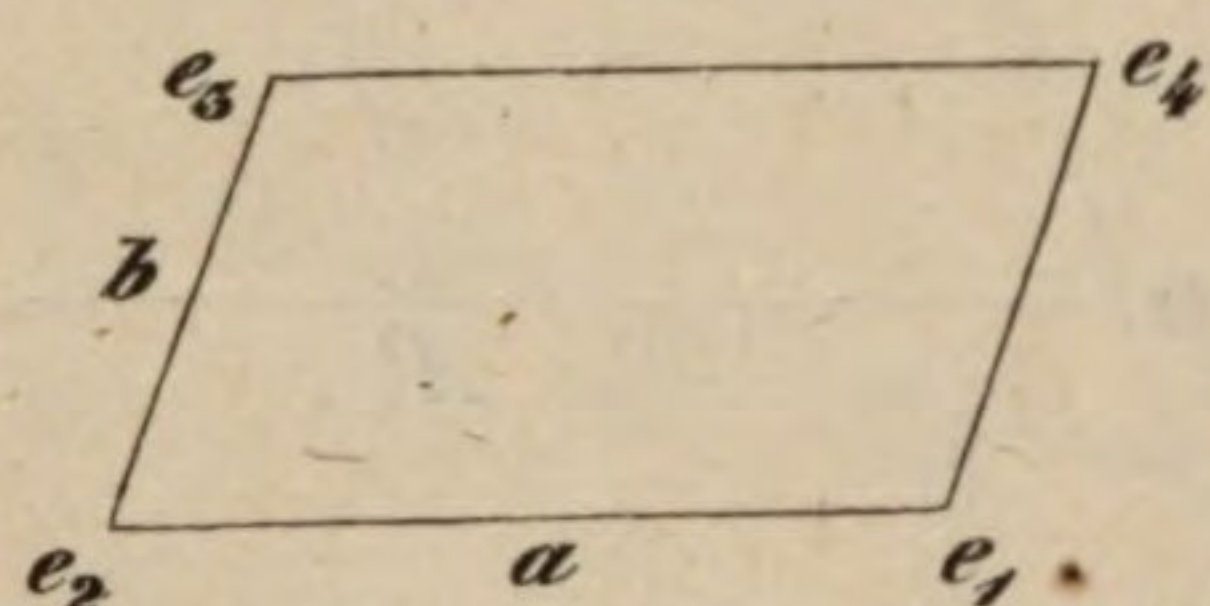
w. z. b. w.

β) Product von Strecken.*)

134. Seien $a = (e_1 - e_2)$ und $b = (e_2 - e_3)$ zwei anstossende Strecken. Dann ist:

$$ab = e_1e_2 + e_2e_3 - e_1e_3 = e_1e_2 - (e_1 - e_2)e_3.$$

Wenn nun



also: $(e_4 - e_3) = (e_1 - e_2),$
 so ist: $e_4 = (e_1 - e_2) + e_3,$
 also: $e_4e_3 = (e_1 - e_2)e_3;$
 also: $ab = e_1e_2 - e_4e_3;$

d. h. ein Parallelogramm.

Das Parallelogramm kann also bezeichnet werden: 1. als Differenz zweier Linientheile (Gegenseiten); 2. als Product zweier Strecken (anstossender Seiten). Das Product ist Null, wenn $e_1e_2 = e_3e_4$ ist, d. h. wenn die Punkte $e_1e_2e_3e_4$ oder die Strecken a, b in derselben Geraden liegen.

135. Es sei $(e_1 - e_2)e_3$ zu bestimmen. Ist wieder

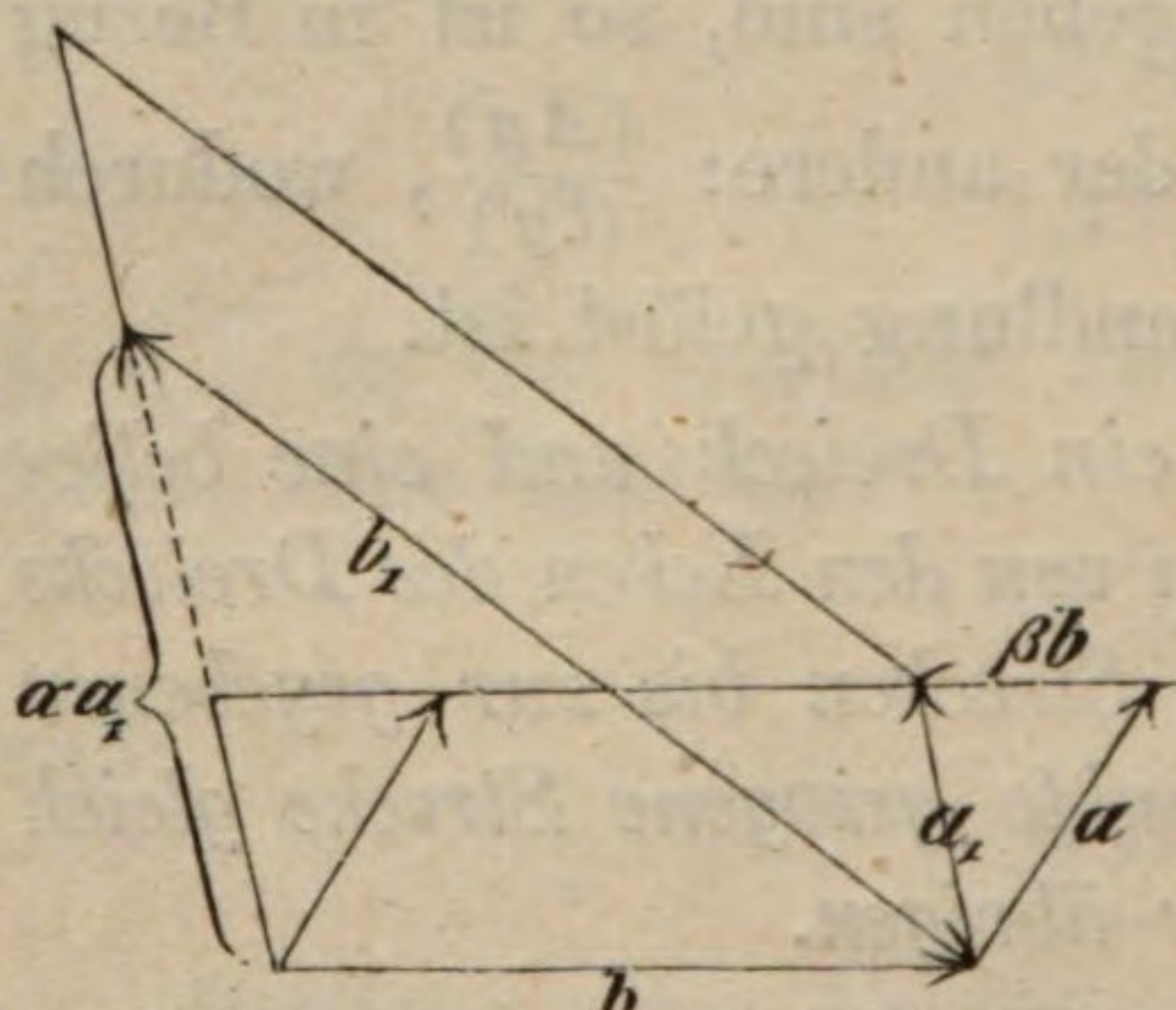
$$(e_1 - e_2) = (e_4 - e_3),$$

so ist:

$$(e_1 - e_2)e_3 = (e_4 - e_3)e_3 = e_4e_3;$$

d. h.: Das Product eines Punktes und einer Strecke ist ein von dem Punkte ausgehender, mit der Strecke gleich langer und gleich gerichteter Linientheil.

136. Sei ab ein Parallelogramm



und $a \pm \beta b = a_1;$

dann ist:

$$ab = a_1b.$$

Sei ferner:

$$b \pm \alpha a_1 = b_1;$$

dann ist:

$$a_1b_1 = a_1b = ab.$$

*) Vgl. G. A. I. § 28—30.

Es ist aber a_1 aus a und b_1 aus b durch lineale Aenderung abgeleitet. *Ein Parallelogramm ändert also seinen Werth nicht, wenn seine Seiten lineale Aenderungen erleiden.*

Anm. Die letzte Formel kann u. A. zur Lösung der Aufgabe dienen: ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, das mit dem ersten eine Ecke (ab) gemeinsam hat, während eine ihrer Gegenseiten auf einer gegebenen Geraden (der Gegenseite von b_1) liegt.

Erweiterung.)* Es seien a und b zwei beliebige nicht¹³⁷ parallele anstossende Strecken und von ihren freien Endpunkten aus sei resp. b_1 parallel mit b und a_1 parallel mit a gezogen. Dann ist

$$a \cdot a_1 = 0; \quad b \cdot b_1 = 0.$$

Sind nun auch die Strecken $(a + b_1)$ und $(b + a_1)$ parallel; d. h. ist

$$(a + b_1)(b + a_1) = 0,$$

dann folgt durch Ausführung der Multiplication:

$$a \cdot b + b_1 a_1 = 0;$$

oder:

$$a \cdot b = a_1 b_1;$$

d. h.: *Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallelen zu den Seiten, so sind die beiden nicht von der Diagonale geschnittenen Parallelogramme gleich.*

Anm. Die letzte Formel dient zur Lösung der Aufgabe: ein Parallelogramm in ein paralleles mit gegebener Seite zu verwandeln.

Da der Quotient zweier gleich gerichteter Strecken eine Zahl ist, so können wir, wenn

$$ab = a_1 b_1$$

ist, auch

$$a_1 = m \cdot a$$

setzen. Dies giebt:

$$a \cdot b = m \cdot a \cdot b_1$$

oder:

$$b \cdot a = m \cdot b_1 \cdot a.$$

Da nun mb_1 , wie b_1 selbst, mit b parallel ist, so kann nur

$$b = mb_1$$

sein; d. h.: wenn $a \cdot b = a_1 b_1$ ist, so haben die Quotienten

$$\frac{a_1}{a} \quad \text{und} \quad \frac{b}{b_1}$$

*) Vgl. G. A. I. S. 66. 109—114.

gleichen Zahlenwerth m . Man sagt dann, die vier Strecken a, b, a_1, b_1 stehen in *Proportion*.

Dividirt man die Formeln $a_1 = m a$ und $b = m b_1$ durch einander, so folgt:

$$\frac{a_1}{b} = \frac{a}{b_1};$$

ferner:

$$\frac{a_1 \pm b}{b} = \frac{a \pm b_1}{b_1};$$

oder:

$$\frac{a_1 \pm b}{a \pm b_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a_1}{a}.$$

Setzen wir nun:

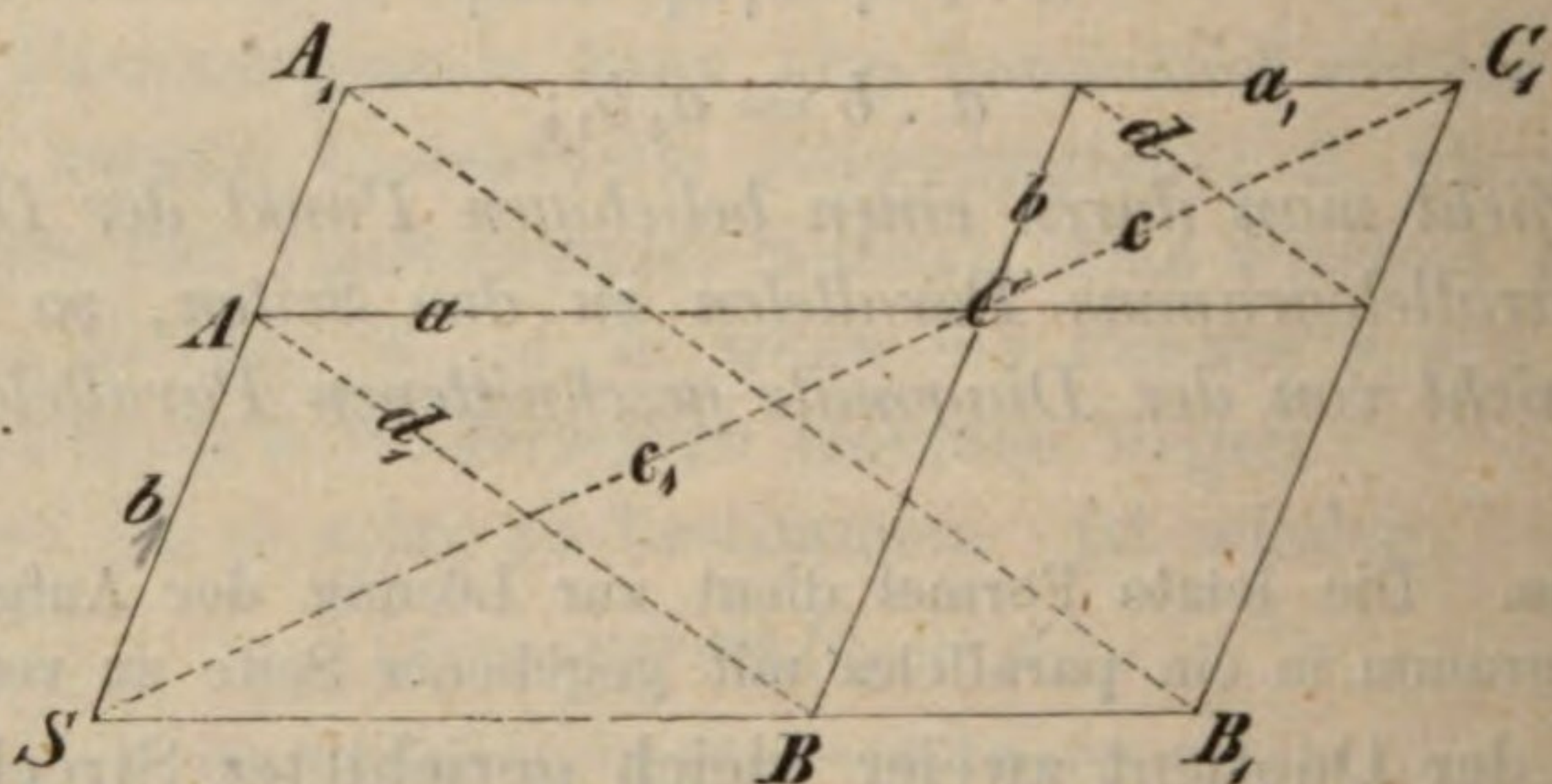
$$a_1 + b = c; \quad a_1 - b = d;$$

$$a + b_1 = c_1; \quad a - b_1 = d_1;$$

so folgt:

$$\frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a_1}{a}; \quad \frac{d}{d_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a_1}{a}.$$

Da nun c mit c_1 parallel ist, und [wegen $(a_1 - b)(a - b_1) = 0$] auch d mit d_1 , so kann man sagen: *Wenn die Seiten*



zweier Dreiecke parallel sind, so stehen ihre Seiten paarweise in Proportion.

Solche Dreiecke heissen *ähnlich*. — Aus der Parallelität ihrer Seiten folgt die Gleichheit ihrer Innenwinkel. Und da ein Dreieck sich auch drehen kann, ohne die Grösse dieser Winkel zu ändern, so hängt schliesslich die Eigenschaft der Aehnlichkeit zwischen zwei Dreiecken nur von der Gleichheit ihrer Winkel (d. h. zweier Winkel) ab.

Ist in der letzten Formel $d = d_1$, so folgt daraus von selbst: $b = b_1$ und $a_1 = a$; d. h.: *wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen, so sind auch die anderen Seiten gleich; d. h. die Dreiecke sind congruent.* (Vgl. N. 107.)

Sei $a = A - C$; $b_1 = B - C$;
 $a + a_1 = A_1 - C_1$; $b_1 + b = B_1 - C_1$;
 dann ist:

$$d_1 = A - B ;$$

$$d + d_1 = A_1 - B_1 ;$$

und es sind auch die Dreiecke der Punkte (ABC) , $(A_1B_1C_1)$ ähnlich. Ebenso (SAB) und (SA_1B_1) . Zieht man durch S eine beliebige andere Gerade, und durch B und B_1 Parallelen, welche diese Gerade in E und E_1 treffen, so zeigt sich durch Vergleichung der Proportionen, dass die Strecken $(A - E)$ und $(A_1 - E_1)$ ebenfalls parallel sind; d. h.: wenn die Eckpunkte eines Dreiecks (ABE) auf drei von einem beliebigen Punkte (S) ausgehenden Geraden sich so fortbewegen, dass zwei Seiten ihre Richtungen behalten, so behält auch die dritte ihre Richtung. Der Punkt S heisst der Aehnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke. Liegen die drei Punkte A, B, E auf derselben Geraden, so geht das Dreieck in eine Strecke über, ohne dass die Proportionen sich ändern.

Aufgaben. 1) Zu beweisen: Fällt man von irgend einem Punkte der Ebene Senkrechten auf zwei ungleiche Seiten eines Parallelogramms und auf die von ihrem gemeinsamen Endpunkte ausgehende Diagonale, so ist das Product aus der Diagonale und ihrer Senkrechten gleich der Summe der Producte aus den Seiten und ihren Senkrechten.*)

Man hat:

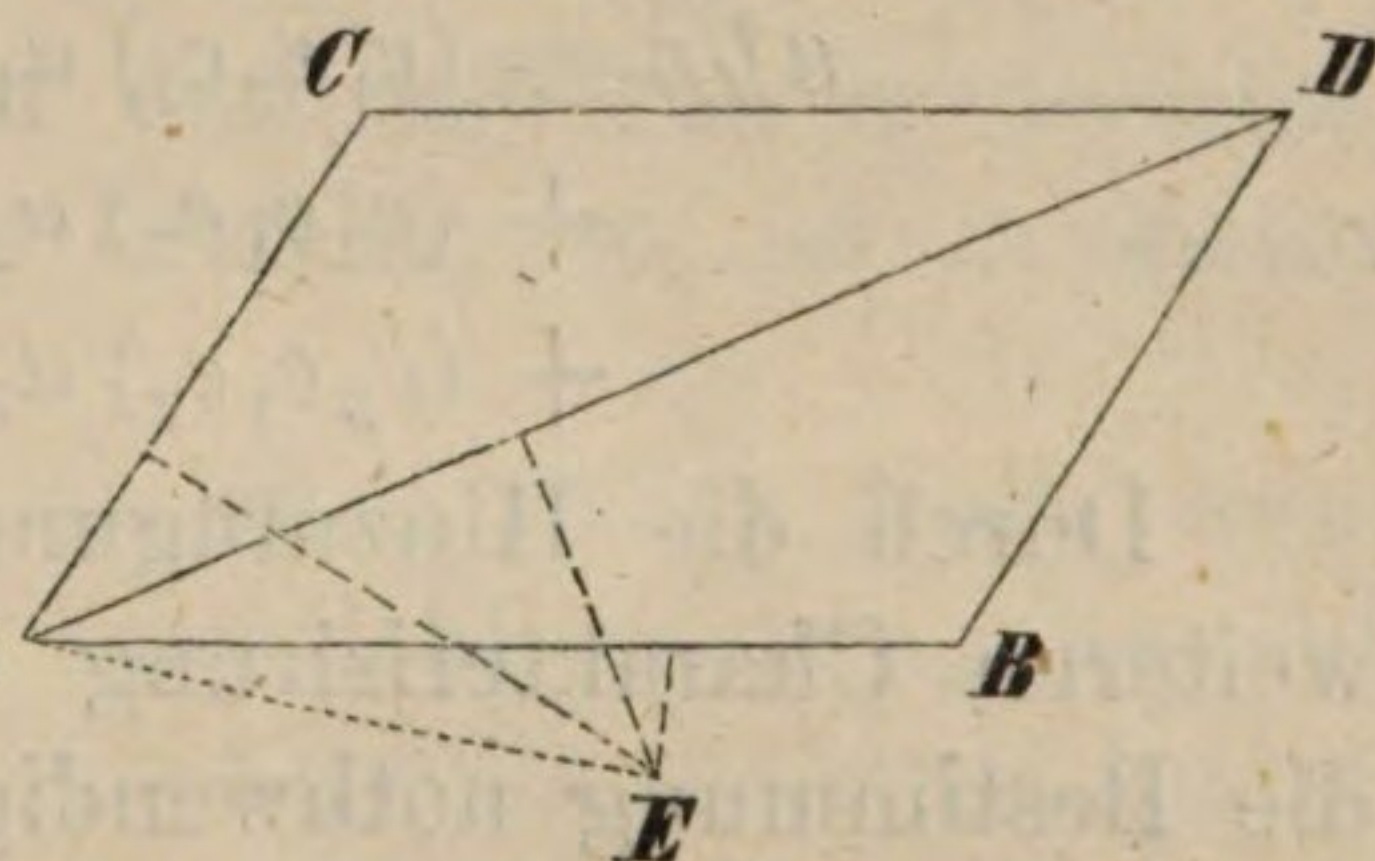
$$(A - D) = (A - B) + (A - C);$$

oder, mit $(A - E)$ multiplicirt:

$$(A - D)(A - E) = (A - B)(A - E) + (A - C)(A - E).$$

Wenn man nun statt dieser drei Parallelogramme die ihnen gleichen, zwischen denselben Parallelen liegenden Rechtecke setzt, so hat man die Behauptung des Satzes.

2) Zu beweisen, dass die Aehnlichkeitspunkte dreier ähnlich liegender Polygone in gerader Linie liegen.



*) S. G. A. I. S. 65.

Seien die Ecken der drei Polygone der Reihe nach mit 1) $A_0 B_0 C_0 \dots$, 2) $A_1 B_1 C_1 \dots$, 3) $A_2 B_2 C_2 \dots$ bezeichnet, und sei S der Aehnlichkeitspunkt zwischen 1) und 2); S_1 der zwischen 2) und 3). Dann ist:

$$S = \alpha A + \beta A_1 = \alpha B + \beta B_1 = \alpha C + \beta C_1 = \dots$$

$$S_1 = \alpha_1 A_1 + \beta_1 A_2 = \alpha_1 B_1 + \beta_1 B_2 = \alpha_1 C_1 + \beta_1 C_2 = \dots$$

Durch Elimination der Punkte $A_1 B_1 C_1 \dots$ erhält man:

$$\begin{aligned} \alpha_1 S - \beta S_1 &= \alpha \alpha_1 A - \beta \beta_1 A_2 \\ &= \alpha \alpha_1 B - \beta \beta_1 B_2 = \alpha \alpha_1 C - \beta \beta_1 C_2 = \dots \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\frac{\alpha_1 S - \beta S_1}{\alpha_1 - \beta} = S_2$$

der Aehnlichkeitspunkt zwischen 1) und 3). Und da zwischen $S S_1 S_2$ die eben gefundene Zahlbeziehung besteht, so liegen alle drei Punkte in derselben Geraden.

c) Grössen vom 3^{ten} Grade.

139. Das Product dreier Grössen 1^{ten} Grades ist eine Grösse 3^{ten} Grades. Seien drei Grössen 1^{ten} Grades gegeben:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3;$$

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3;$$

$$c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3;$$

dann ist:

$$\begin{aligned} abc &= (e_1 e_2 e_3) \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + (e_1 e_3 e_2) \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 \\ &+ (e_2 e_1 e_3) \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 + (e_2 e_3 e_1) \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 \\ &+ (e_3 e_1 e_2) \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 + (e_3 e_2 e_1) \alpha_3 \beta_2 \gamma_1. \end{aligned}$$

Durch die Hinzufügung eines dritten Factors wird zur weiteren Charakterisirung der äusseren Multiplication noch die Bestimmung nothwendig, dass

$$(e_1 e_2) e_3 = e_1 (e_2 e_3),$$

dass also das Gesetz der beliebigen Zusammenfassung gelte. Nur unter dieser Voraussetzung lässt sich das Product abc auf eine Form von gleicher Einfachheit bringen, wie oben das Product ab .

$$\text{Da nun} \quad e_\alpha e_\beta = - e_\beta e_\alpha$$

ist, so erhält man durch Anwendung des eben aufgestellten Gesetzes:

$$abc = e_1 e_2 e_3 [\alpha_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \alpha_2 (\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) + \alpha_3 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)].$$

Es kommt nun nur noch darauf an, das Product der drei Punkte $e_1 e_2 e_3$ zu bestimmen.

Unter dem Producte dreier Punkte e_1, e_2, e_3 ($e_1 e_2 e_3$) verstehen wir einen *Flächentheil* (Theil der Ebene), welcher mit dem Parallelogramm ($e_1 e_2 - e_3 e_4$), worin $(e_1 - e_2) = (e_3 - e_4)$ ist, gleiche Grösse und Seite hat.*)

Anm. Das *Parallelogramm* erscheint also als Lagenunterschied zweier *Linientheile*, der *Flächentheil* als Theil der durch diese Linientheile bestimmten *Ebene*. Das Parallelogramm ist eine arithmetische Grösse, der Flächentheil ein reines Ausdehnungsgebilde.

Es sind nun folgende Fälle möglich:

1) a, b, c sind vielfache *Punkte*; dann ist (abc) ein vielfacher Flächentheil.

2) b und c seien *Punkte*, a eine *Strecke* ($= c - d$). Dann ist

$$abc = (c - d) b \cdot c = -dbc;$$

d. h.: abc ist ebenfalls ein Flächentheil.

3) b und c seien *Strecken*, a ein *Punkt*; ($b = a - d$); ($c = a - e$); dann ist:

$$abc = a(a - d)(a - e) = ade,$$

und abc wieder ein Flächentheil.

4) a, b, c seien *Strecken*, $a = (d - e)$; $b = (d - f)$; $c = (d - g)$. Da aber zwischen drei Strecken in derselben Ebene stets eine Zahlbeziehung besteht, so ist in diesem Falle das Product $abc = 0$.

Ueberhaupt ist das Product in allen Fällen Null, wenn zwischen den drei Grössen abc eine Zahlbeziehung besteht; d. h. in 1) wenn die drei Punkte, in 2) wenn die zwei Punkte mit der Strecke in derselben Geraden liegen, in 3) wenn die beiden Strecken parallel sind. — Alles dies ergiebt sich durch Untersuchung der Beziehungen zwischen den Zahlen $\alpha \beta \gamma$.

Bezeichnen wir das Parallelogramm ($\varepsilon_1 - \varepsilon_2$), oder $140. (e_1 e_2) - (e_3 e_4)$ mit S , sodass

$$S = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (e_1 e_2) - (e_3 e_4).$$

Dann ist:

*) Vgl. G. A. I. § 114. 115.

$$S \cdot e_3 = (e_1 e_2 e_3) - (e_3 e_4 e_3) = (e_1 e_2 e_3).$$

Ferner:

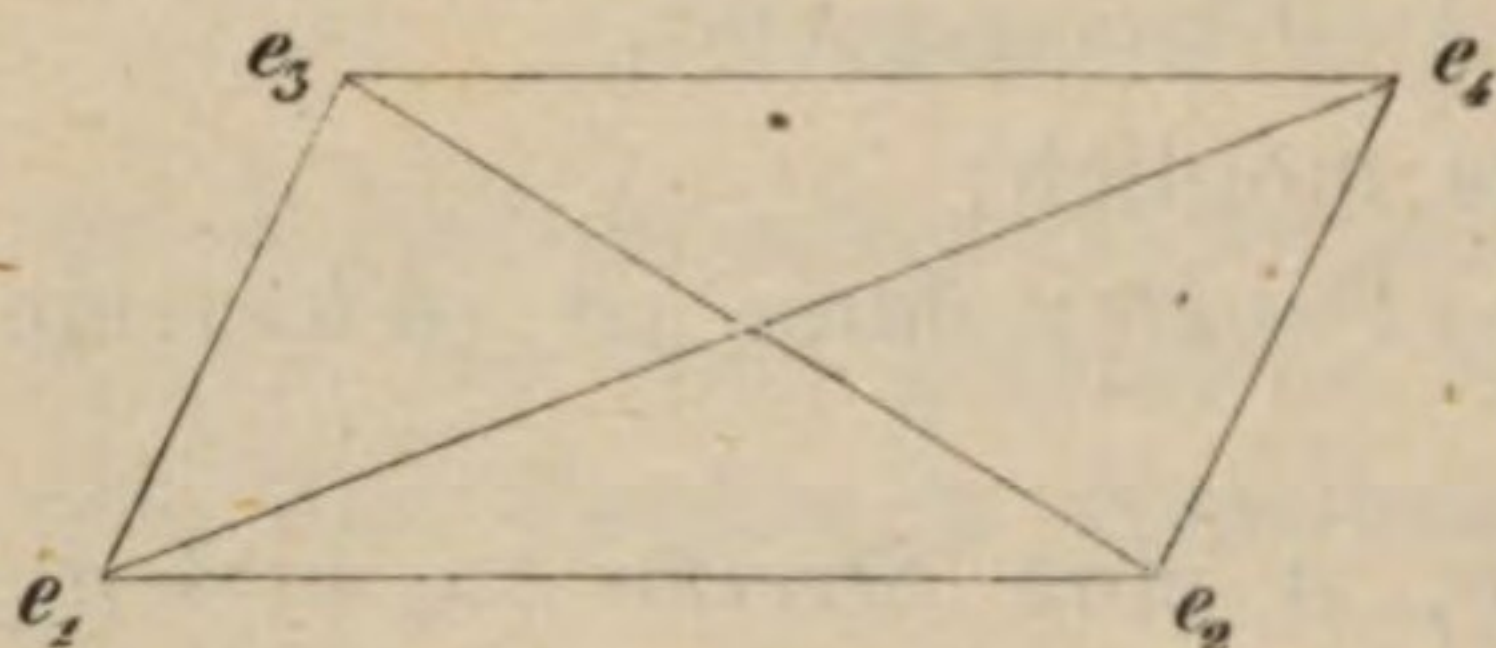
$$S \cdot e_1 = - (e_3 e_4 e_1) = + (e_3 e_1 e_4) = - (e_1 e_3 e_4) = + (e_1 e_4 e_3);$$

$$S \cdot e_2 = - (e_3 e_4 e_2) = + (e_2 e_4 e_3);$$

$$S \cdot e_4 = + (e_1 e_2 e_4).$$

Aus der Formel $(e_1 - e_2) = (e_3 - e_4)$ folgt nun, dass $(e_1 e_2 e_3) = (e_1 e_4 e_3) = (e_2 e_4 e_3) = (e_1 e_2 e_4)$ ist. Folglich ist ein Flächentheil das Product aus dem zugehörigen Parallelogramme und einem seiner vier Eckpunkte.

Die Producte je dreier Eckpunkte eines Parallelogramms sind Flächentheile mit gleichen oder entgegengesetzten Vorzeichen, je nachdem die Reihenfolge der Punkte bestimmt wird durch Bewegung auf den Seiten ihrer Dreiecke in gleichem oder entgegengesetztem Sinne.



Anm. Am Punkte haftet also als grössenbildender Factor: im Gebiet 0^{ter} Stufe die Zahl, 1^{ter} Stufe die Strecke, 2^{ter} Stufe das Parallelogramm. Es entsprechen sich also in den drei Gebieten die Ausdehnungsgebilde: Punkt, Linientheil, Flächentheil, und die arithmetischen Grössen: Zahl, Strecke, Parallelogramm. Und wie die Streckencoefficients zweier gleich grosser Linientheile auch dann einander gleich sind, wenn diese letzteren in verschiedenen (parallelen) Gebieten liegen, so auch die Parallelogrammcoefficients zweier gleich grossen Flächentheile, wenn diese in verschiedenen (parallelen) Gebieten liegen.

Sei

$$(e_1 - e_2) = (e_5 - e_6);$$

$$(e_2 - e_3) = (e_6 - e_7).$$

Dann ist:

$$(e_1 - e_2) (e_2 - e_3) = (e_5 - e_6) (e_6 - e_7);$$

d. h.: Parallelogramme können gleich sein, wenn sie nicht in derselben, sondern in parallelen Ebenen liegen.

Multiplicirt man aber die letzte Gleichung mit e_3 , so folgt:

$$(e_1 - e_2) (e_2 - e_3) e_3 = (e_5 - e_6) (e_6 - e_7) e_3;$$

oder:

$$e_1 e_2 e_3 = e_5 e_6 e_3 - e_5 e_7 e_3 + e_6 e_7 e_3.$$

Soll nun $e_1 e_2 e_3 = e_5 e_6 e_7$ sein, so muss offenbar

$$e_3 = e_7$$

sein, d. h.: die Flächentheile müssen in derselben Ebene

liegen. Nur unter dieser Bedingung also können Flächentheile einander gleich sein. *)

Sei (abc) ein Flächentheil, und

141.

dann ist:

$$a + \beta b = a_1;$$

$$a_1 b c = a b c.$$

Sei ferner:

$$b + \gamma c = b_1;$$

dann ist:

$$a_1 b_1 c = a_1 b c = a b c.$$

Sei endlich:

$$c + \alpha a_1 = c_1;$$

dann ist:

$$a_1 b_1 c_1 = a_1 b_1 c = a b c;$$

d. h.: *Ein Flächentheil ändert seinen Werth nicht, wenn seine Factoren lineale Aenderungen erleiden.*

Setzt man $(e_1 e_2 e_3) = 1$, so kann man jede hieraus ab-142. geleitete Grösse durch eine Zahl bezeichnen; $(e_1 e_2 e_3)$ heisst nun *Breiten-(Flächen-)Einheit*, und ist eine *Einheit 3^{ter} Stufe*. Die daraus abgeleiteten Grössen heissen *einfach*, wenn sie als Producte von drei Grössen 1^{ter} Stufe darstellbar sind; sonst *zusammengesetzt*.

Wenn $(e_1 e_2 e_3) = 1$ gesetzt ist, so heisst $(e_2 e_3)$ die *Ergänzung* von e_1 ; man schreibt:

$$\text{und: } \begin{array}{l} e_2 e_3 = | e_1, \quad \text{da } e_1 (e_2 e_3) = + 1, \\ e_1 e_3 = - | e_2, \quad \text{da } e_2 (e_1 e_3) = - 1. \end{array}$$

Umgekehrt ist:

$$e_1 = + | e_2 e_3, \quad \text{da } (e_2 e_3) e_1 = + e_2 e_3 e_1 = + e_1 e_2 e_3 = + 1;$$

und:

$$e_2 = - | e_1 e_3, \quad \text{da } (e_1 e_3) e_2 = + e_1 e_3 e_2 = - e_1 e_2 e_3 = - 1.$$

Setzt man in $e_1 (e_2 e_3) = 1$ für $e_2 e_3$ seinen Werth, so folgt:

$$(e_1 | e_1) = 1;$$

ebenso:

$$(e_2 e_3 | e_2 e_3) = 1.$$

Wenn

$$e_2 e_3 = | e_1,$$

so ist:

$$| e_2 e_3 = || e_1,$$

oder:

$$|| e_1 = + e_1.$$

Wenn

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

*) Vgl. G. A. II. 256. 258.

ist, so verstehen wir unter der *Ergänzung von a* die Grösse:

$$| a = \alpha_1 | e_1 + \alpha_2 | e_2 + \alpha_3 | e_3.$$

B. Grössen, abgeleitet aus mehreren festen Strecken
(und Punkten).

a) Punkte (aus Geraden [und Punkten]).

143. Vermittelst der äusseren Multiplication konnten wir aus zwei oder mehreren Grössen niederer Stufe eine Grösse höherer Stufe ableiten. Zur Lösung der umgekehrten Aufgabe wird es nöthig, den Begriff des äusseren Productes von einem höheren Gesichtspunkte aufzufassen.*)

Wir nennen das durch die Punkte $e_1 e_2 e_3$ bestimmte Gebiet „das *Hauptgebiet*“; wir nennen ferner ein äusseres Product von beliebig vielen Factoren *progressiv*, wenn die Summe der Stufenzahlen seiner Factoren *gleich* oder *kleiner als* die Stufenzahl des Hauptgebietes ist; dagegen *regressiv*, wenn diese Summe *grösser* ist als die Stufenzahl des Hauptgebietes. — Um den Werth des regressiven Products zu bestimmen, bildet man das Product der Ergänzungen der gegebenen Factoren. Die Ergänzung dieses Productes ist dann das regressive Product.

Man sieht, dass die bisher betrachteten Producte sämtlich *progressiv* waren.

Betrachten wir nun als einfachsten Fall im Hauptgebiet 3^{ter} Stufe das regressive Product zweier Grössen 2^{ter} Stufe.

1) Sei

$$a = e_1 e_2 \quad ; \quad | a = e_3 ;$$

$$b = e_2 e_3 \quad ; \quad | b = e_1 .$$

Dann ist nach der Definition des regressiven Products, wenn wir dasselbe einstweilen in eckige Klammern einschliessen:

$$[ab] = | (| a . | b) ;$$

oder:

$$| [ab] = (| a . | b) .$$

Setzt man:

$$| a = a_1 \quad ; \quad a = | a_1 ;$$

$$| b = b_1 \quad ; \quad b = | b_1 ;$$

so folgt:

$$| [| a_1 . | b_1] = (a_1 b_1) ;$$

*) Vgl. G. A. I. § 144. II. 289—295.

d. h.: wenn das Product zweier Grössen progressiv, so ist dasjenige ihrer Ergänzungen regressiv. — Man kann nun für beide Arten der Multiplication dasselbe Klammerzeichen wählen. Und für beide gilt der Satz: Die Ergänzung eines Products ist gleich dem Producte der Ergänzungen seiner Factoren.

Führen wir in der ersten unserer obigen Formeln statt a und b die Grössen e ein, so folgt:

$$[(e_1 e_2) (e_2 e_3)] = | (e_3 e_1) = e_2 = (e_1 e_2 e_3) \cdot e_2.$$

Das progressive Product zweier Grössen 1^{ter} Stufe war von 2^{ter} Stufe; das regressiv Product zweier Grössen 2^{ter} Stufe ist, wie man sieht, von 1^{ter} Stufe.

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ist } \quad a &= e_1 e_2; & | \quad a &= e_3; \\ b &= e_1 e_3; & | \quad b &= - e_2; \end{aligned}$$

so folgt aus $(ab) = | (| a | b)$:

$$[(e_1 e_2) \cdot (e_1 e_3)] = | (- e_3 e_2) = | (e_2 e_3) = e_1 = (e_1 e_2 e_3) e_1.$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Ist } \quad a &= e_1 e_3; & | \quad a &= - e_2; \\ b &= e_2 e_3; & | \quad b &= e_1; \end{aligned}$$

so erhält man:

$$[(e_1 e_3) \cdot (e_2 e_3)] = | (- e_2 e_1) = | (e_1 e_2) = e_3 = (e_1 e_2 e_3) e_3.$$

$$\begin{aligned} \text{Wenn} \quad a &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3; \\ b &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3; \end{aligned}$$

dann ist:

$$\begin{aligned} (ab) &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 e_2 & | \quad a &= \alpha_1 (e_2 e_3) + \alpha_2 (e_3 e_1) + \alpha_3 (e_1 e_2) \\ &+ (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e_2 e_3 & | \quad b &= \beta_1 (e_2 e_3) + \beta_2 (e_3 e_1) + \beta_3 (e_1 e_2); \\ &+ (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) e_3 e_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} | (ab) &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_3 & | \quad a \cdot | b &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_3 \\ &+ (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e_1 & &+ (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e_1 \\ &+ (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) e_2; & &+ (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) e_2; \end{aligned}$$

also:

$$| (ab) = | a \cdot | b.$$

Wenden wir nunmehr die vorstehenden Resultate auf 144. das Gebiet der Ebene als Hauptgebiet an. Ein Product im Hauptgebiet der Ebene heisst planimetrisches Product.

Das Product zweier sich schneidender Linientheile ist regressiv und dem Durchschnittspunkte gleich.

Anm. Da es bei der Bestimmung eines Punktes auf die Länge der ihn bestimmenden Linien nicht ankommt, so kann man im *regressiven* Producte die *Linientheile* mit den durch sie bestimmten *Geraden* vertauschen.

Das Product eines *Linientheils* und eines *Punktes* (oder dreier *Punkte*) ist *progressiv*, und dem durch beide bestimmten *Parallelogramm* an Grösse gleich. Es ist Null, wenn der *Punkt* mit dem *Linientheil* oder den beiden anderen *Punkten* in derselben *Geraden* liegt. (Bereits oben bewiesen.)

Multipliziert man die in 2), 1), 3) am Schlusse erhaltenen Gleichungen mit einander, so folgt:

$$(e_1 e_2) (e_1 e_3) (e_1 e_2) (e_2 e_3) (e_1 e_3) (e_2 e_3) = (e_1 e_2 e_3) e_1 (e_1 e_2 e_3) e_2 (e_1 e_2 e_3) e_3;$$

$$\text{oder:} \quad - (e_1 e_2) (e_1 e_3) (e_2 e_3) \cdot (e_1 e_2) (e_1 e_3) (e_2 e_3) \\ = - (e_1 e_2 e_3) (e_1 e_2 e_3) (e_1 e_2 e_3) \cdot (e_1 e_2 e_3),$$

$$\text{oder:} \quad [(e_1 e_2) (e_1 e_3) (e_2 e_3)]^2 = (e_1 e_2 e_3)^4;$$

$$\text{endlich:} \quad (e_1 e_2) (e_1 e_3) (e_2 e_3) = (e_1 e_2 e_3)^2;$$

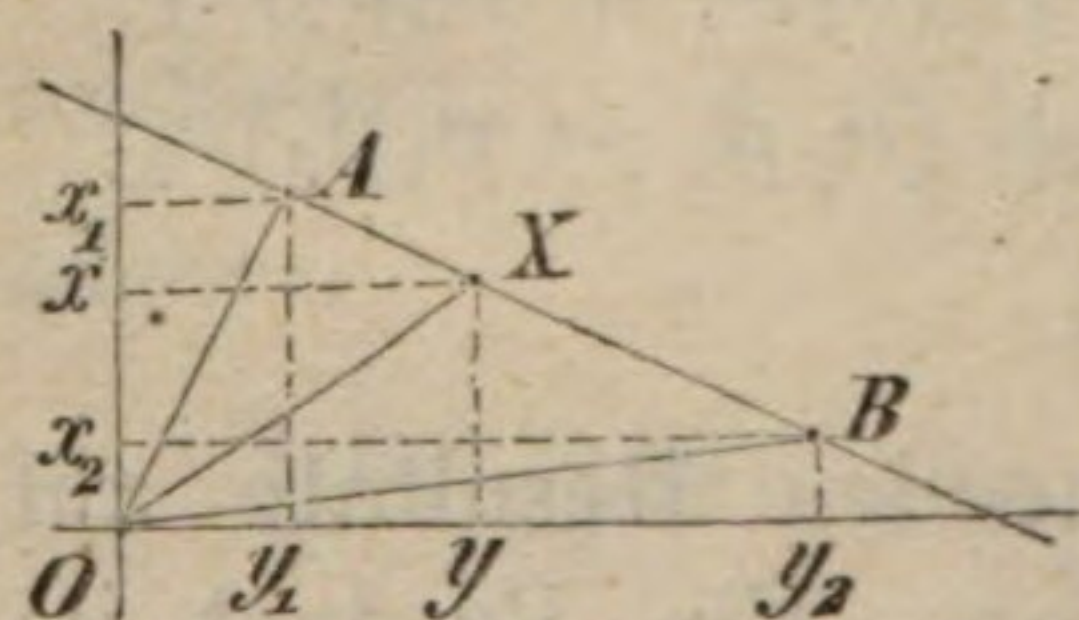
d. h.: Das *pl. Product* dreier, die Seiten eines Dreiecks bildender *Linientheile* ist gleich dem vierfachen Quadrat dieses Dreiecks. Es ist also nur dann Null, wenn die drei Punkte zusammenfallen. M. a. W.: Das *planimetrische Product* dreier durch einen Punkt gehenden Geraden ist Null.

Wenn ein beweglicher Punkt *X* mit zwei anderen festen Punkten *A* und *B* auf derselben Geraden liegen soll, so wird diese Bedingung ausgedrückt durch die Gleichung:

$$(XAB) = 0.$$

Diese Gleichung heisst die *Gleichung des Punktes X*, und die durch *A* und *B* bestimmte Gerade der *geometrische Ort des Punktes X*.*)

*) Uebergang zur Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten. Sei *O* der Anfangspunkt, für *A*(*x*₁*y*₁); *B*(*x*₂*y*₂); *X*(*x**y*) die rechtwinkligen Coordinaten, ferner (*X* — *O*) = *r*; (*A* — *O*) = *r*₁; (*B* — *O*) = *r*₂, dann ist: (*XAB*) = 0; oder:



$$(O + r) (O + r_1) (O + r_2) = 0;$$

$$\text{oder:} \quad Or_1 r_2 + rOr_2 + rr_1 O = 0,$$

weil (*OO*) = 0 und auch *r*₁*r*₂*r*₃ als Product von drei Strecken in derselben Ebene Null ist. Weiter:

$$O(r_1 r_2 - r r_2 + r r_1) = 0; \quad r(r_1 - r_2) + r_1 r_2 = 0;$$

Wenn eine bewegliche Gerade x mit zwei anderen festen Geraden a und b durch denselben Punkt gehen soll, so wird diese Bedingung ausgedrückt durch die Gleichung:

$$(x a b) = 0.$$

Diese Gleichung heisst die *Gleichung der Geraden x* .

Wenn in einem planimetrischen Producte die Summe ^{145.} der Stufenzahlen gleich oder kleiner als drei ist, so heisst es *rein progressiv*. Es ist nämlich in diesem Falle *jeder* Factor mit dem vorhergehenden durch *progressive* Multiplication verbunden. Der Werth des Productes ist im ersten Falle eine Zahl (vgl. das Product abc auf S. 97), im zweiten Falle eine Grösse vom Grade der Summe der Stufenzahlen, in beiden Fällen also eine Grösse vom Grade des Restes, den die Division der Summe der Stufenzahlen durch 3 ergibt.

Nimmt man in einem Producte von m progressiven Factoren die Ergänzung jedes Factors, so hat man die Stufenzahl jedes Factors von 3 zu subtrahiren, also die Summe ihrer Stufenzahlen von $3m$; und je nachdem diese Summe gleich oder kleiner als 3 ist, wird die Stufenzahl des neuen Productes gleich oder grösser als $(3m - 3)$ sein. Ein Product dieser Art heisst *rein regressiv*, weil *jeder* Factor mit dem vorigen durch *regressive* Multiplication verbunden ist. Der Werth des Productes wird ebenso wie im vorigen Falle ermittelt. Denn bei fortschreitender Multiplication kann man jede Gruppe der drei verschiedenen Einheiten e_1, e_2, e_3 auf die Form $(e_1 e_2 e_3)$ bringen, und diesen Factor gleich 1 setzen. Das Product kann also nur von 0^{ter}, 1^{ter} oder 2^{ter} Stufe sein.

Beträgt in einem Producte von m Factoren die Summe der Stufenzahlen mehr als 3 und weniger als $3m - 3$, so heisst das Product ein *gemischtes*, weil in diesem Falle die Factoren theils durch progressive, theils durch regressive Multiplication eingefügt sein müssen. Sein Werth wird durch die oben angegebene Rechnung bestimmt. Das Product ist

$$(x + y)(x_1 + y_1 - x_2 - y_2) + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = 0;$$

$$x(y_1 - y_2) + y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 + y_1 x_2 = 0;$$

$$x(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

(Vgl. G. A. I. § 119. II. 306. 307. 308.)

insbesondere eine Grösse 0^{ter} Stufe, d. h. eine Zahl, wenn die Summe seiner Stufenzahlen durch 3 theilbar ist.

Bestimmt man den Werth eines gemischten Productes durch Ausführung der fortschreitenden Multiplication, so bleibt schliesslich ein Product von drei Factoren übrig. Dieses Product ist insbesondere gleich Null, wenn es drei Punkte darstellt, die auf *einer* Geraden liegen, oder drei Geraden, die durch *einen* Punkt gehen.

146. Wenn in der Ebene ein System von festen Punkten und Geraden gegeben ist, und ein beweglicher Punkt X oder eine bewegliche Gerade x durch veränderliche Geraden und Punkte mit diesem System so verbunden werden können, dass beständig drei von den Punkten auf derselben Geraden liegen, oder drei von den Geraden durch denselben Punkt gehen, so lässt sich diese Beziehung durch ein gleich Null gesetztes planimetrisches Product darstellen. *)

Die Linie, welche vom Punkte X beschrieben wird, oder deren sämtliche Tangenten durch alle Richtungen der Geraden x dargestellt werden, heisst eine *Curve*. — Man sagt auch, die Curve sei der geometrische Ort, im 1. Falle des Punktes, im 2. Falle der Geraden.

Setzt man in dem ersten Falle im planimetrischen Producte:

$$X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

worin e_2 und e_3 zwei gleich lange, zu einander senkrechte Strecken bedeuten, und e_1 ihren Durchschnittspunkt, drückt man dann die festen Geraden (als Strecken betrachtet) und Punkte durch ähnliche Gleichungen aus, setzt alle diese Werthe in dem planimetrischen Producte ein, und löst die Klammern, so erhält man eine in α homogene Gleichung vom Grade derjenigen Zahl, welche angiebt, wie oft in dem planimetrischen Producte der Punkt X vorkommt. Dividirt man dann die ganze Gleichung durch die ebenso hohe Potenz von α_1 , so erhält man eine Gleichung zwischen den Variablen $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$, welche die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes X sind. Eine Curve, deren Gleichung vom n^{ten} Grade ist,

*) Vgl. G. A. I. §. 145—148. II. 309. 310.

oder deren planimetrisches Product den Punkt X n mal enthält, heisst *Curve n^{ter} Ordnung*.

Aus dem oben gefundenen Producte $(XAB) = 0$ können wir sehen, dass die Gerade eine Curve 1^{ter} Ordnung ist.

Setzt man im zweiten Falle:

$$x = \alpha_1 | e_1 + \alpha_2 | e_2 + \alpha_3 | e_3$$

und verfährt wie oben, so bestimmt die erhaltene Gleichung, wenn sie vom Grade p ist, eine *Curve p^{ter} Klasse*.

Wenn die Grössen α für beide Curven dieselben sind, so heisst die zweite Curve die Reciprocal-(Polar-)Curve der ersten, und umgekehrt; x ist dann die Tangente an diese zweite Curve.

Aus dem oben gefundenen Producte $(xab) = 0$ können wir sehen, dass der Punkt eine Curve 1^{ter} Klasse ist.

Anwendung auf die Curven 2^{ter} Ordnung.)* Die einfachste Form eines planimetrischen Productes, welches eine Curve 2^{ter} Ordnung darstellt, erhält man, wenn man vom Punkte X ausgeht, und in dem darauf folgenden Theile des Productes so lange abwechselnd feste Punkte und Geraden setzt, bis man zum Punkte X zurückkehren kann, ohne dass das Product für *jede* Lage von X Null wird.

Anm. Für Curven höherer Grade wird das Bildungsgesetz des planimetrischen Productes complicirter. Die gesetzmässige Ableitung desselben aus einer gegebenen Zahlengleichung wird unten gezeigt werden.

Unter Berücksichtigung der Bedingung, dass die Summe der Stufenzahlen der Factoren durch 3 theilbar sein muss, erhält man nun die Gleichung:

$$(XAbCdEX) = 0,$$

worin ACE feste Punkte, b und d feste Geraden bedeuten. Diese Gleichung drückt folgenden Satz aus: *Wenn die Seiten eines Dreiecks um drei feste Punkte (ACE) sich drehen, während zwei Ecken auf festen Geraden ($b\ d$) sich bewegen, so beschreibt die dritte Ecke (X) eine Curve 2^{ter} Ordnung. (Kegelschnitt.)*

Die Gleichung wird befriedigt, wenn X mit A oder E zusammenfällt; folglich liegen diese beiden Punkte auf der

*) Vgl. G. A. I. § 147. II. 323.

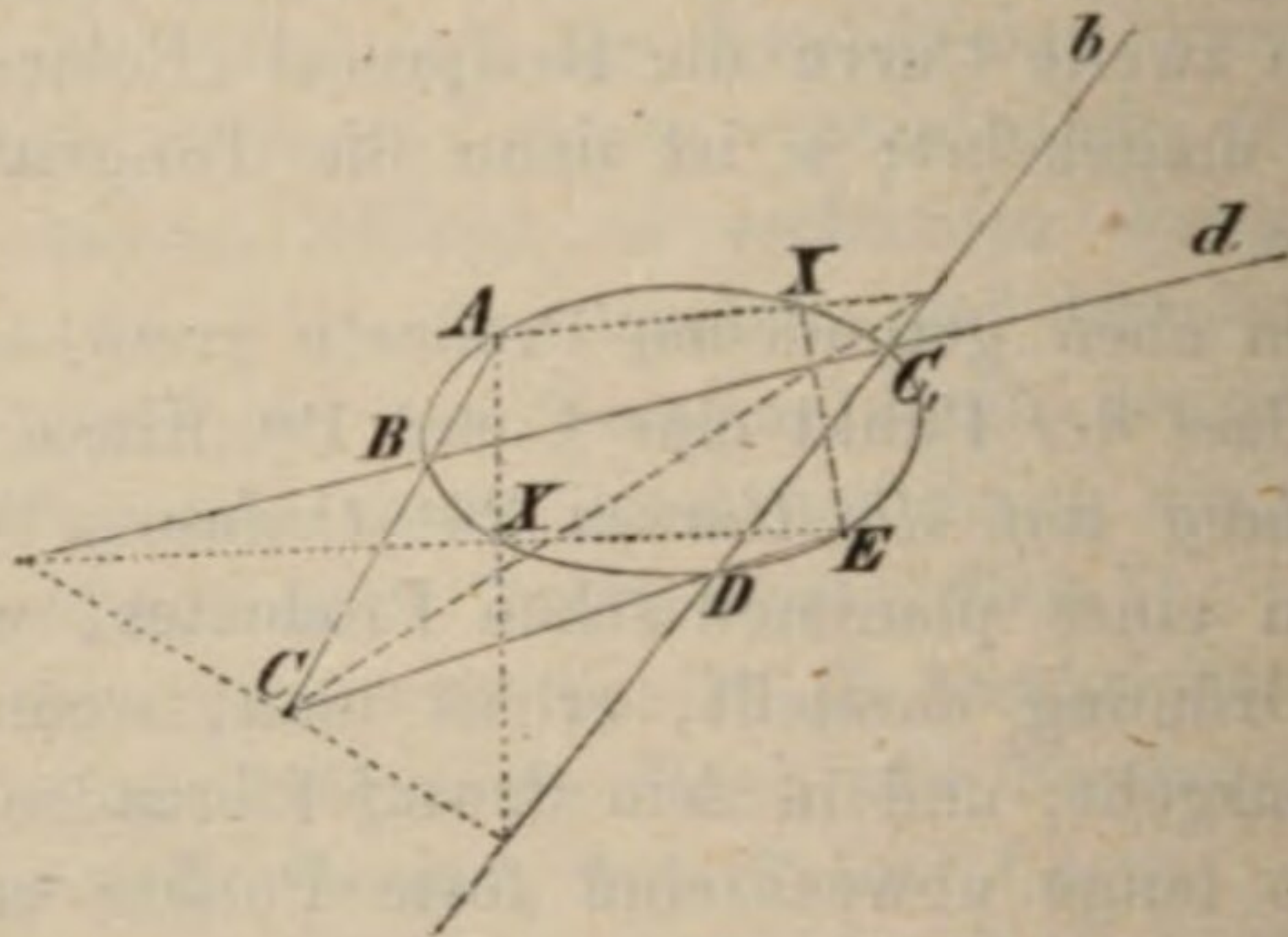
Curve. — Sei ferner C_1 der Durchschnittspunkt von b und d ; B derjenige von (AC) und d ; D derjenige von (EC) und b ; dann ist:

$$b = (C_1 D); \quad d = (C_1 B); \quad C = (AB) \cdot (DE);$$

und unsere Gleichung kann geschrieben werden:

$$[XA \cdot (C_1 D) \cdot ([AB] \cdot [DE]) \cdot (BC_1) EX] = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Curve auch durch die Punkte $C_1 B D$ geht. — Man erhält nämlich:



1. für $X = C_1$; $[C_1 C (BC_1) EC_1] = C_1 EC_1 = 0$.

2. für $X = D$; $[D \cdot C (BC_1) \cdot ED] = [D \cdot E (BC_1) E \cdot D] = 0$,

und ein mit 2. analoges Resultat für $X = B$.

Somit ist eine Curve 2^{ter} Ordnung durch fünf ihrer Punkte vollkommen bestimmt.

148. Verwandlung des planimetrischen Productes in eine Zahlen-
gleichung. — Dreipunkt-Coordinationen. — Es sei:

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3;$$

und $e_1 e_2 e_3$ mögen mit den festen Punkten ACE zusammenfallen. Dann ist:

$$A = e_1; \quad b = \beta_1 (e_2 e_3) + \beta_2 (e_3 e_1) + \beta_3 (e_1 e_2); \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

$$C = e_2; \quad d = \delta_1 (e_2 e_3) + \delta_2 (e_3 e_1) + \delta_3 (e_1 e_2); \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0.$$

$$E = e_3;$$

Ferner ist:

$$XA = x_2 (e_2 e_1) + x_3 (e_3 e_1);$$

$$XAb = x_2 \beta_1 e_2 - (x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3) e_1 + x_3 \beta_1 e_3;$$

$$XAbC = - (x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3) (e_1 e_2) + x_3 \beta_1 (e_3 e_2);$$

$$XAbCd = [\delta_1(x_2\beta_2 + x_3\beta_3) - \delta_3x_3\beta_1]e_2 \\ - \delta_2(x_2\beta_2 + x_3\beta_3)e_1 + \delta_2x_3\beta_1e_3;$$

$$XAbCdE = [\delta_1(x_2\beta_2 + x_3\beta_3) - \delta_3x_3\beta_1](e_2e_3) \\ - \delta_2(x_2\beta_2 + x_3\beta_3)(e_1e_3);$$

$$XAbCdEX = [\delta_1(x_2\beta_2 + x_3\beta_3) - \delta_3x_3\beta_1]x_1 \\ + \delta_2(x_2\beta_2 + x_3\beta_3)x_2 = 0;$$

oder:

$$(\beta_2x_2 + \beta_3x_3)(\delta_2x_2 + \delta_1x_1) = \delta_3\beta_1x_1x_3.$$

Ist β_1 oder $\delta_3 = 0$, d. h.: geht b durch A , oder d durch E , so geht die Curve über in ein System von zwei Geraden mit den Gleichungen:

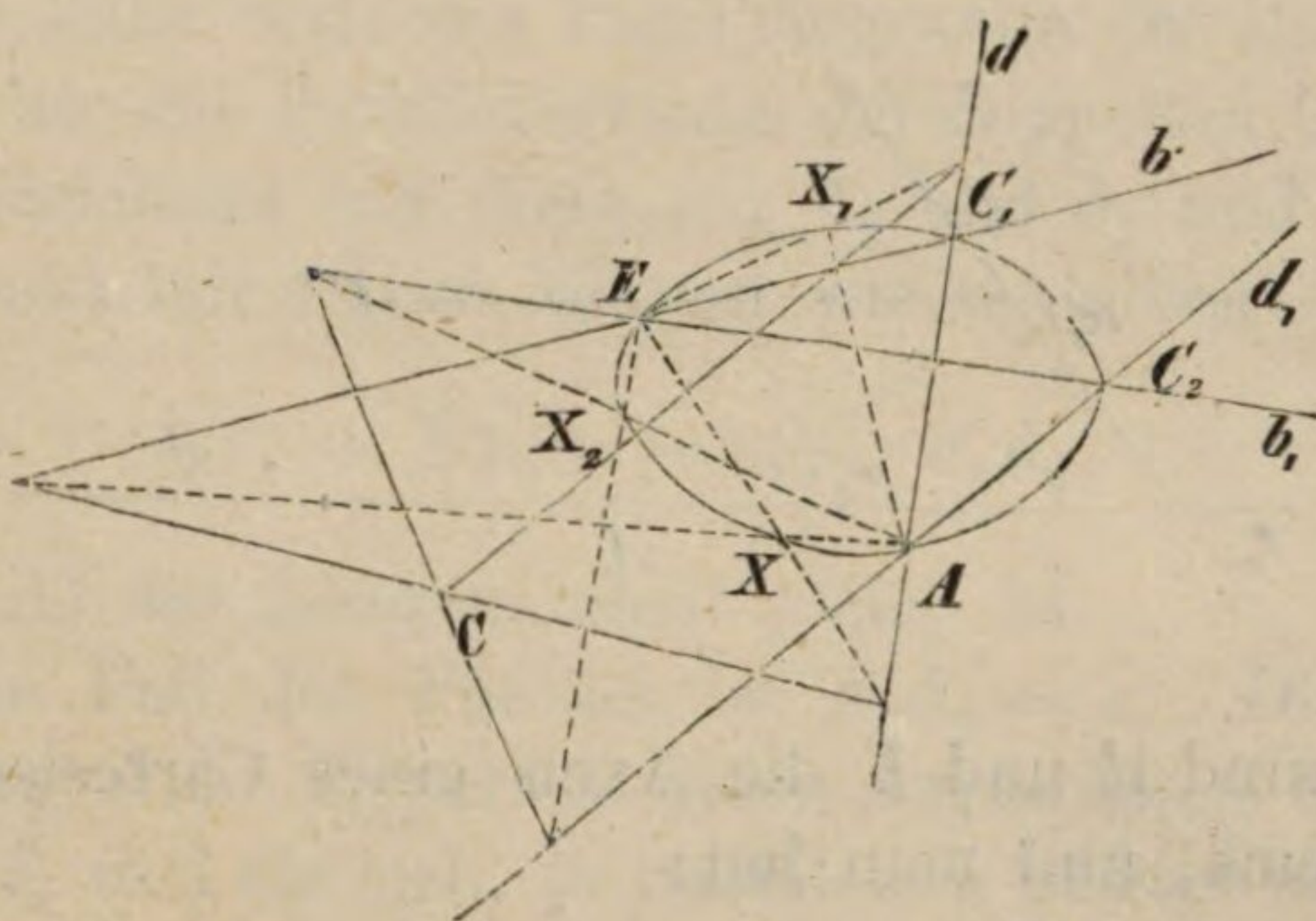
$$\beta_2x_2 + \beta_3x_3 = 0; \quad \delta_2x_2 + \delta_1x_1 = 0;$$

oder, da nun $\beta_2 = -\beta_3$; $\delta_2 = -\delta_1$ ist:

$$x_2 = x_3; \quad x_2 = x_1.$$

Da in diesem Falle $X = x_1A + 2x_2\left(\frac{C+E}{2}\right)$, resp. $X = 2x_2\left(\frac{C+A}{2}\right) + x_3E$ ist, so sieht man, dass die beiden Geraden die von A und E ausgehenden Transversalen des Dreiecks der Punkte ACE sind.

Ist β_2 oder $\delta_2 = 0$, d. h.: geht b oder d durch C , so gelangt man nach einigen Umformungen zu den Gleichungen



$x_3(x_2 - x_1) = 0$, resp. $x_1(x_2 - x_3) = 0$, erhält also wieder ein System von zwei Geraden.

In beiden Fällen ist, wie man sieht, die Richtung von b und d gleichgültig.

Ist β_3 und $\delta_1 = 0$, so nimmt unsere Gleichung die einfachere Gestalt an:

$$\beta_2 \delta_2 x_2^2 = \delta_3 \beta_1 x_1 x_3;$$

oder, da $\beta_2 \delta_2 = \delta_3 \beta_1$ ist:

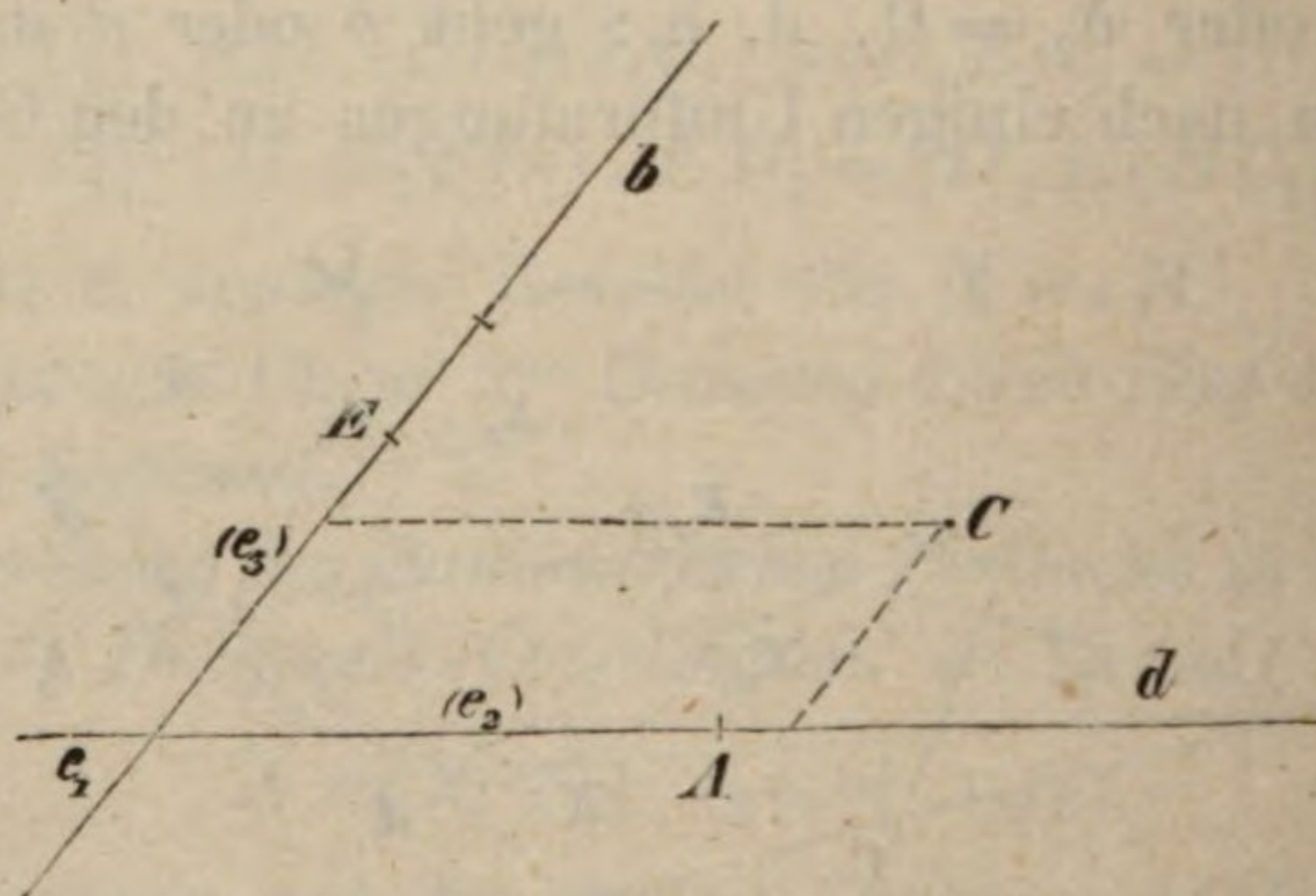
$$x_2^2 = x_1 x_3,$$

wobei wieder die Richtung der Geraden b und d gleichgiltig ist. Die letzte Formel drückt nun folgenden Satz aus: *Verbindet man zwei beliebige (variable) Punkte (X (X_1) und C_1 , oder X_2 und C_2) auf einer Curve 2^{ten} Grades mit zwei festen Punkten auf derselben (A und E), so geht die äussere Diagonale des vollständigen Vierecks der vier Punkte stets durch denselben Punkt (C).*

Da die Punkte B und D der vorigen Figur jetzt resp. mit A und E zusammenfallen, so sind die Geraden (CE) und (CA) Tangenten an die Curve. —

Der durch die Punkte CAE gelegte Kreis schneidet also die Curve unter rechten Winkeln.

149. *Cartesische Coordinaten.* — Wir nehmen ebenso, wie in dem zuletzt betrachteten Falle, an, dass Punkt A auf d und E auf b liege. — Der Durchschnittspunkt beider Linien sei mit e_1 bezeichnet, die Strecke ($e_1 - A$) mit e_2 ; ($e_1 - E$) mit



αe_3 ; dann sind d und b die Axen eines Cartesischen Coordinatensystems, und man hat:

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3;$$

$$A = e_1 - e_2;$$

$$C = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3; \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1.$$

$$E = e_1 - \alpha e_3;$$

$$b = e_1 e_3; \quad d = e_1 e_2.$$

Demnach:

$$\begin{aligned}
 XA &= (x_1 + x_2)(e_2 e_1) + x_3(e_3 e_1) + x_3(e_2 e_3); \\
 XAb &= (x_1 + x_2)e_1 + x_3 e_3; \\
 XAbC &= [(x_1 + x_2)\gamma_3 - x_3\gamma_1](e_1 e_3) \\
 &\quad + (x_1 + x_2)\gamma_2(e_1 e_2) + x_3\gamma_2(e_3 e_2); \\
 XAbCd &= [(x_1 + x_2)\gamma_3 - x_3\gamma_1]e_1 - x_3\gamma_2 e_2; \\
 XAbCdE &= x_3\gamma_2(e_1 e_2) + \alpha[(x_1 + x_2)\gamma_3 - x_3\gamma_1](e_3 e_1) \\
 &\quad + \alpha x_3\gamma_2(e_2 e_3); \\
 XAbCdEX &= x_3^2\gamma_2 + \alpha[(x_1 + x_2)\gamma_3 - x_3\gamma_1]x_2 \\
 &\quad + \alpha x_3\gamma_2 x_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Setzt man nun $\frac{x_3}{x_1} = y_3$ und $\frac{x_2}{x_1} = y_2$, und löst die Klammern, so folgt:

$$\gamma_2 y_3^2 - \alpha \gamma_1 y_2 y_3 + \alpha \gamma_3 y_2^2 + \alpha \gamma_3 (y_2 + y_3) = 0,$$

oder:

$$\gamma_2 y_3 (y_3 + \alpha) + \alpha \gamma_3 y_2 (y_2 + 1) = \alpha \gamma_1 y_2 y_3.$$

Diese Gleichung stellt, wie bekannt, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem $\alpha \gamma_1^2$ kleiner, gleich, oder grösser als $4 \gamma_2 \gamma_3$ ist. Schreibt man die letzte Bedingung in der Form:

$$\alpha \lesseqgtr \frac{4 \gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\gamma_3}{\gamma_1},$$

so stellt die linke Seite das Parallelogramm der Punkte $e_1 EA$ dar, die rechte das Parallelogramm der doppelten Coordinaten von C . Bezeichnen wir diese mit δ_2 und δ_3 und den zugehörigen Punkt mit C' , so können wir schreiben:

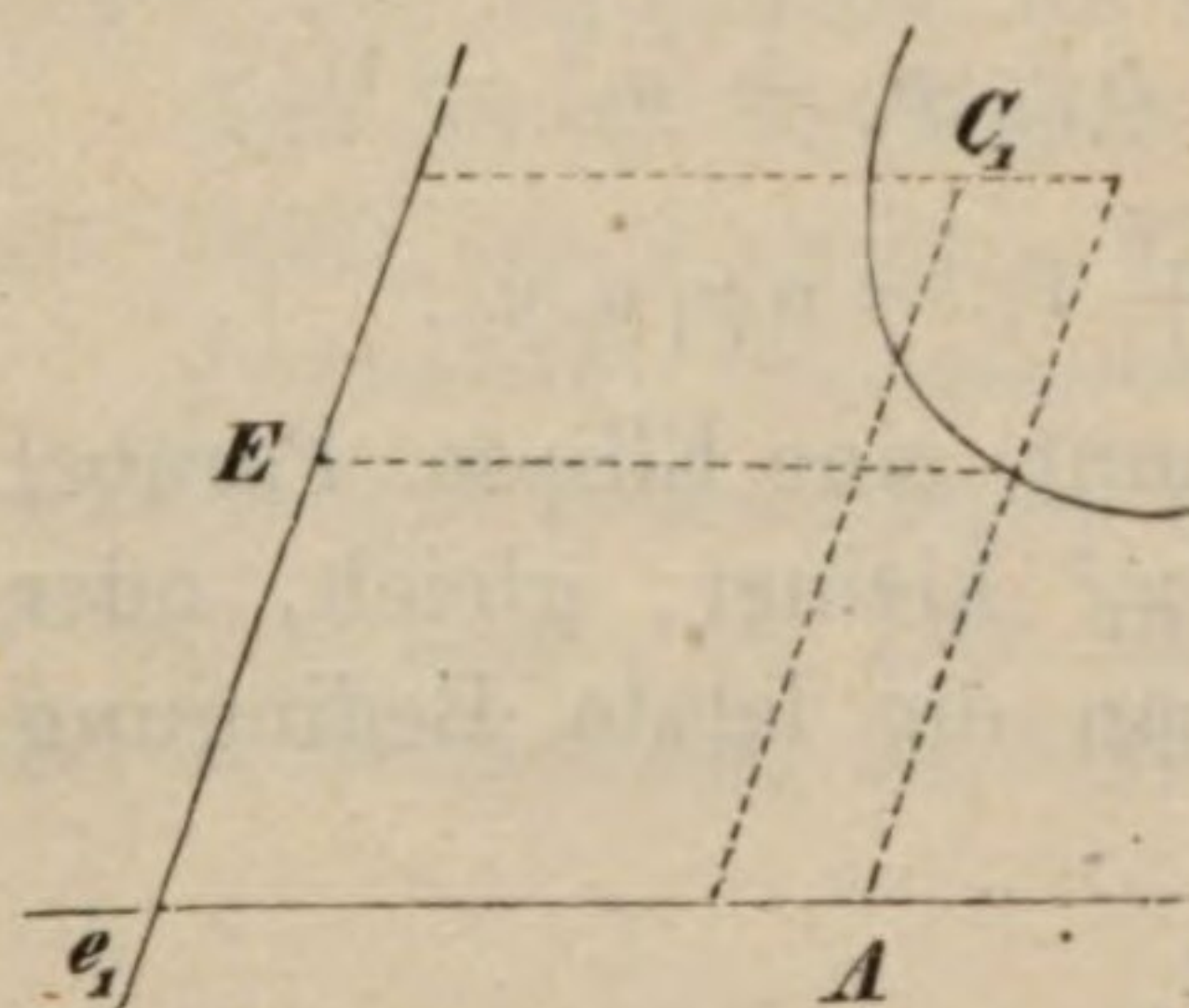
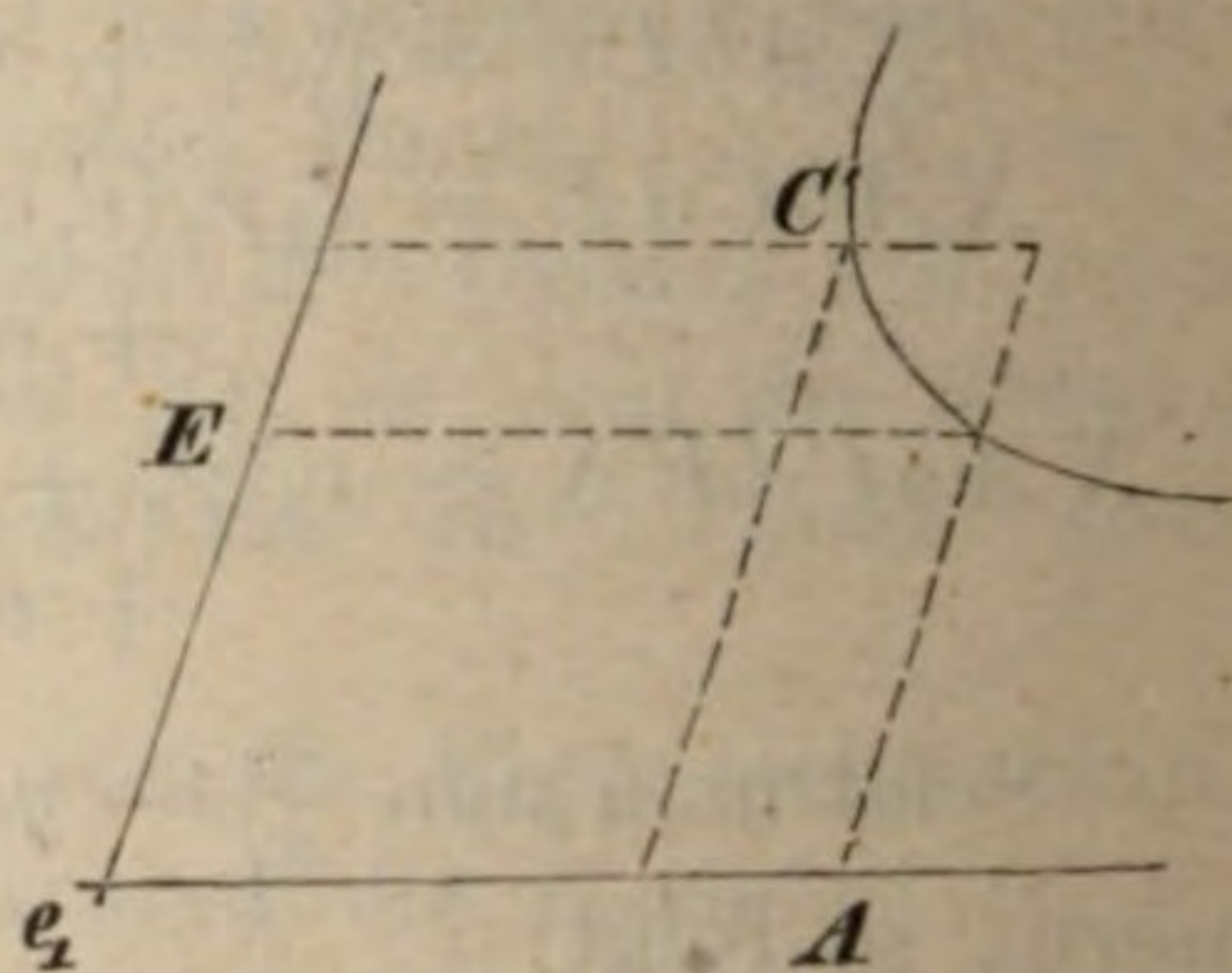
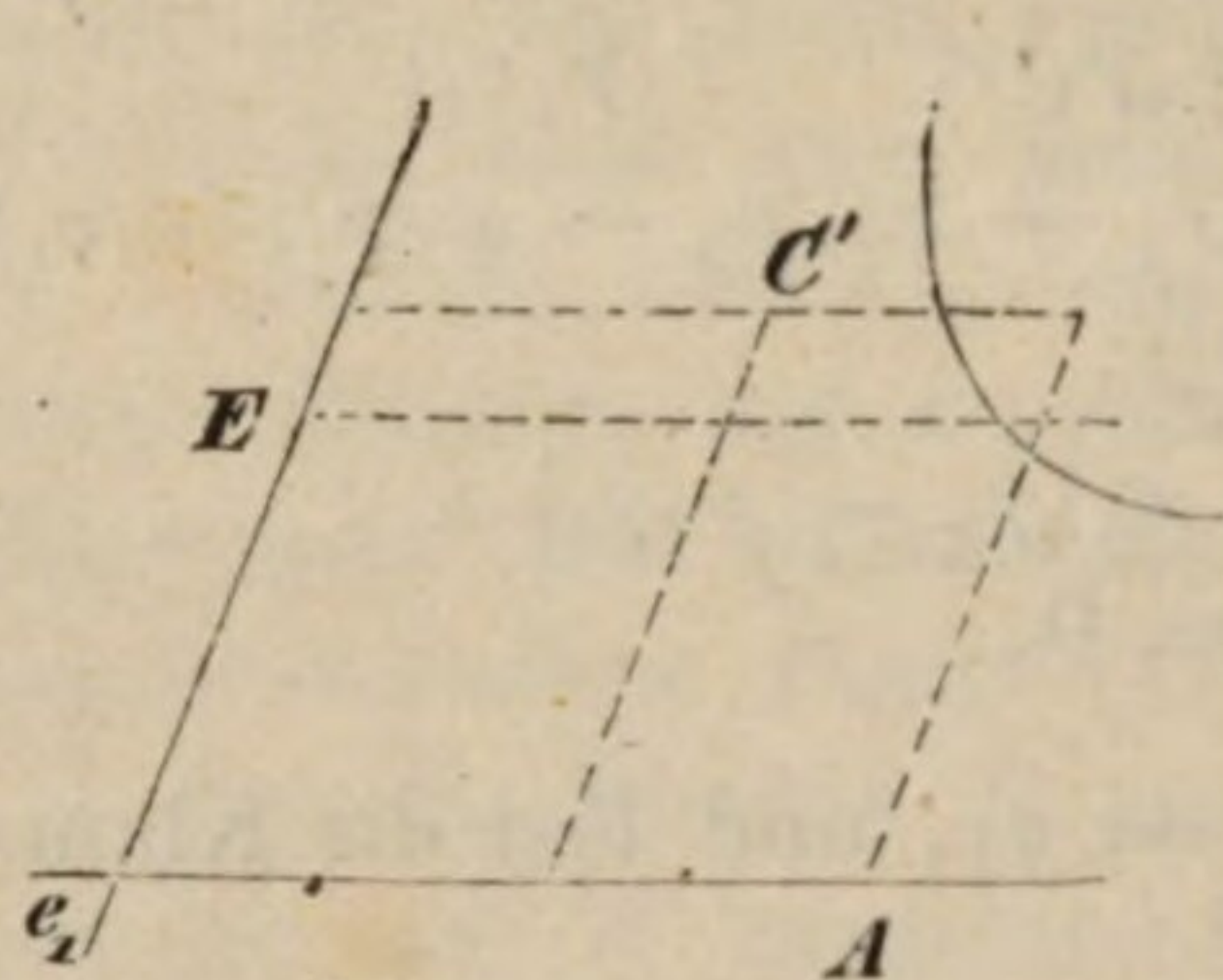
$$(e_1 - E)(e_1 - A) \lesseqgtr \delta_2 \delta_3,$$

weil $(e_1 - A)$ der Längeneinheit gleich ist.

Für den Fall der Parabel ist $\delta_2 \delta_3 = \alpha$. Dies ist aber die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten die Geraden b und d sind, und die sich, je nachdem α positiv oder negativ ist, in dem einen oder anderen Paare von Scheitelwinkeln befindet. Wenn wir daher die Geraden b und d , sowie die Punkte A und E als fest betrachten, C' aber als beweglich, so liefert der Punkt C' eine *Parabel*, wenn er auf einer der Hyperbeln $\delta_2 \delta_3 = \pm \alpha$ liegt, eine *Ellipse*, wenn einer, eine Hyperbel, wenn keiner der vier Hyperbelzweige ihm seine concave Seite zuwendet (oder je nachdem er mit

e_1 auf verschiedener oder derselben Seite des Hyperbelsystems liegt).

150. *Specialisirung der Gleichung 2^{ten} Grades.* Es sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem angenommen, der Durch-



schnittpunkt von b und d mit Y bezeichnet, und die Punkte A , C , E so gewählt, dass:

$$\begin{aligned} A &= e_1 + e_3; \\ C &= e_1 + \beta e_2; \\ E &= e_1 - e_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3; \\ Y &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3; \end{aligned}$$

dann ist:

$$\begin{aligned} b &= EY = y_2(e_2 e_3) - (y_1 + y_3)(e_3 e_1) + y_2(e_1 e_2); \\ d &= AY = -y_2(e_2 e_3) + (y_1 - y_3)(e_3 e_1) + y_2(e_1 e_2); \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} XA &= x_2(e_2 e_1) + (x_3 - x_1)(e_3 e_1) + x_2(e_2 e_3); \\ XAb &= e_1[x_2(y_1 + y_3) + y_2(x_1 - x_3)] + e_2 \cdot 2x_2 y_2 \\ &\quad + e_3[x_2(y_1 + y_3) - y_2(x_1 - x_3)] \\ &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3; \\ XAbC &= (a_2 - a_1 \beta)(e_2 e_1) + a_3 \beta(e_3 e_2) - a_3(e_1 e_3); \\ XAbCd &= e_1[(y_3 - y_1)(a_2 - a_1 \beta) - y_2 a_3] \\ &\quad + e_2 y_2[(a_1 - a_3)\beta - a_2] + e_3[(y_1 - y_3)\beta - y_2] a_3; \\ XAbCdE &= (e_2 e_1)[(a_1 - a_3)\beta - a_2] y_2 \\ &\quad + (e_3 e_1)[(y_1 - y_3)([a_1 + a_3]\beta - a_2) - 2y_2 a_3] \\ &\quad + (e_3 e_2)[(a_1 - a_3)\beta - a_2] y_2; \\ XAbCdEX &= (-y_2 x_1 - x_3 y_2)[2y_2(x_1 - x_3)\beta - 2x_2 y_2 \\ &\quad + x_2(y_1 - y_3)(2x_2[y_1 + y_3]\beta - 2x_2 y_2) \\ &\quad - 2y_2 x_2(x_2[y_1 + y_3] - y_2[x_1 - x_3])] = 0, \end{aligned}$$

Endlich ist: $y_1 = (x b C); \quad y_2 = (x a C).$

Hierdurch sind die Zahlen x_1 und x_2 als planimetrische Producte dargestellt.

Construirt man ferner die Coordinaten von y_1 und y_2 , und setzt:

$$(y_1 a B) = f,$$

zieht ferner $(c f)$, und setzt:

$$(f c) (y_2 b) = e,$$

zieht endlich $(e a)$, und setzt:

$$z = (e a) C,$$

dann ist:

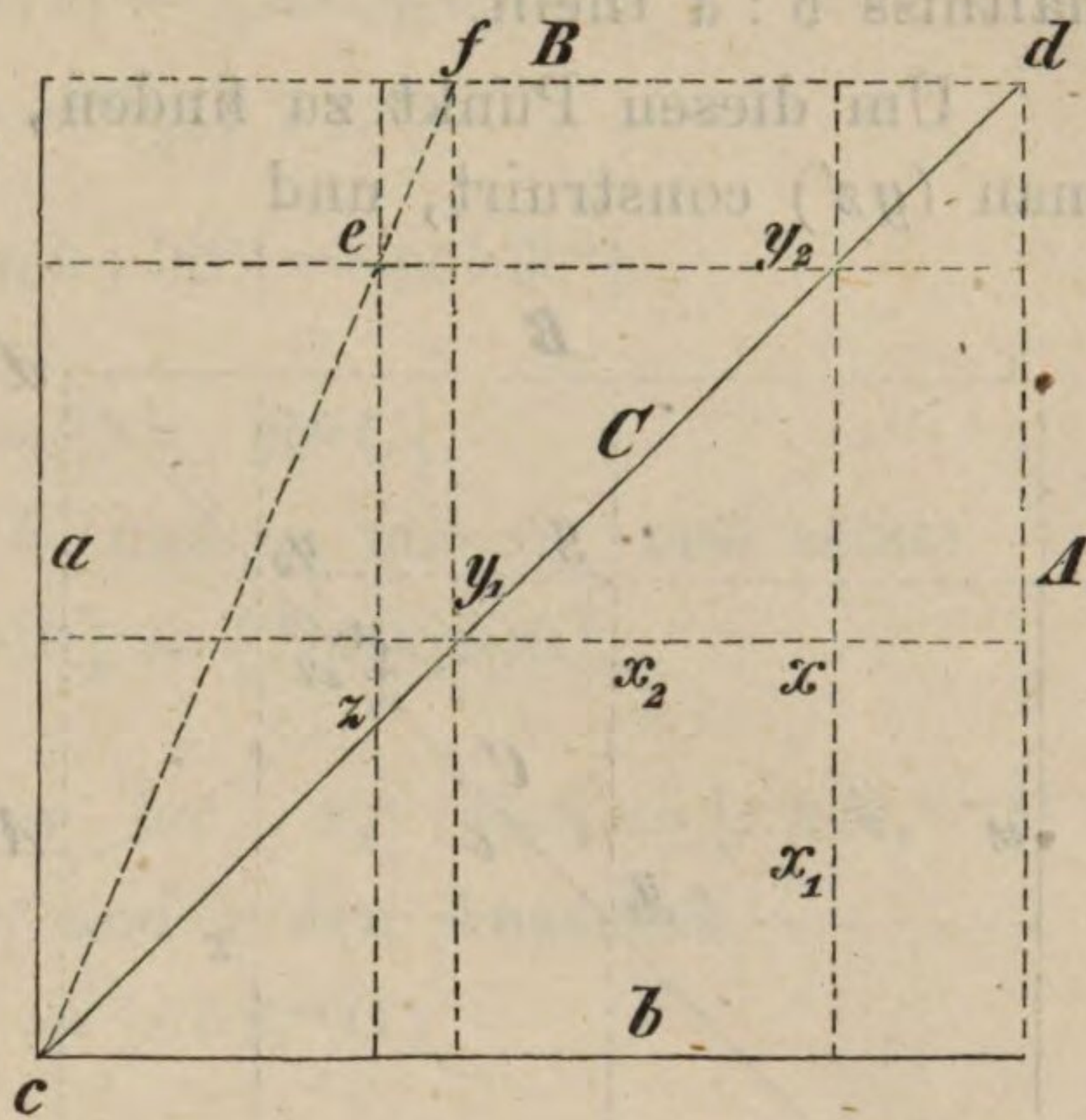
$$\frac{(c z)}{(c y_1)} = \frac{(c e)}{(c f)} = \frac{(c y_2)}{(c d)} = x_2;$$

und da

$$\frac{(c y_1)}{(c d)} = x_1,$$

so folgt:

$$\frac{(c z)}{(c d)} = x_1 x_2.$$



Der Punkt z ist also das räumliche Bild des Productes $x_1 x_2$.

Da ferner e mit z auf der zu a gezogenen Parallellinie liegt, so ist:

$$(z a) = (e a).$$

Endlich ist:

$$z = [y_1 a B c (y_2 b) a C] = [y_1 b A c (y_2 a) b C];$$

also auch:

$$(z a) = [y_1 a B c (y_2 b) a]; \quad (z b) = [y_1 b A c (y_2 a) b],$$

da die Vertauschung der Buchstaben a, A mit b, B an der Figur nichts ändert.

Hierdurch ist nun das Product $x_1 x_2$ als planimetrisches Product dargestellt.

Endlich möge auf der Geraden cd ein Punkt z' so bestimmt werden, dass er die Summe der Zahlen x_1 und x_2 repräsentire. Dann soll sein:

$$\frac{(c z')}{(c d)} = \frac{a x_1 + b x_2}{a + b};$$

oder:

$$\frac{(c z')}{(c d)} = \frac{a}{a + b} \cdot \frac{(c y_1)}{(c d)} + \frac{b}{a + b} \cdot \frac{(c y_2)}{(c d)};$$

Dann ist:

$$[(x_1 x_2) b] = [y_1 b A c(y_2 a) b].$$

Setzt man hierin z für y_1 , d. h. $x_1 x_2$ für x_1 , so folgt:

$$[(x_1^2 x_2) b] = [z b A c(y_2 a) b] = [y_1 b (A c(y_2 a) b) \cdot (A c(y_2 a) b)],$$

oder, wenn wir

$$\mathfrak{R} = [A c(x a) b] = [A c(y_2 a) b]$$

setzen:

$$[(x_1^2 x_2) b] = [y_1 b \cdot \mathfrak{R}^2].$$

Ebenso:

$$[(x_1^m x_2) b] = [y_1 b \cdot \mathfrak{R}^m] = [x b \mathfrak{R}^m].$$

Daraus folgt:

$$(x_1^m x_2) = [x b \cdot \mathfrak{R}^m C].$$

Vertauscht man a mit b , und x_1 mit x_2 , und setzt:

$$\mathfrak{R}_1 = [B c(x b) a] = [B c(y_1 b) a],$$

so folgt:

$$[(x_1 \cdot x_2^m) a] = [x a \mathfrak{R}_1^m] \quad \text{oder} \quad [(x_1 \cdot x_2^{n-1}) a] = [x a \mathfrak{R}_1^{n-1}].$$

Setzt man hierin für x_1 und x den Ausdruck

$$(x_1^m x_2) = [x b \mathfrak{R}^m C]$$

ein, so erhält man:

$$[(x_1^m x_2^n) a] = [x b \mathfrak{R}^m C \cdot a \mathfrak{R}_1^{n-1}] = \mathfrak{L};$$

Ebenso:

$$[(x_1^p x_2^q) b] = [x a \mathfrak{R}_1^p C \cdot b \mathfrak{R}^{q-1}] = \mathfrak{L}_1;$$

daher:

$$\left(\frac{a x_1^m x_2^n + b x_1^p x_2^q}{a + b} \right) = [\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L}_1 (a a - b b) C] = [\mathfrak{L} \mathfrak{L}_1 a_1 C].$$

Weiter ist:

$$\left(\frac{a \left[\frac{a x_1^m x_2^n + b x_1^p x_2^q}{a + b} \right] + b \cdot x_1^r x_2^s}{a + b} \right),$$

wenn wir ausserhalb der eckigen Klammer c statt b und $a + b$ statt a setzen:

$$= \left(\frac{a x_1^m x_2^n + b x_1^p x_2^q + c x_1^r x_2^s}{a + b + c} \right).$$

Auf der rechten Seite aber ist $[\mathfrak{L} \mathfrak{L}_1 a_1 C]$ für y_1 und $\mathfrak{L}_2$ für $(y_2 b)$ zu setzen, so dass:

$$\left(\frac{a x_1^m x_2^n + b x_1^p x_2^q + c x_1^r x_2^s}{a + b + c} \right) = [\mathfrak{L} \mathfrak{L}_1 a_1 C a \mathfrak{L}_2 a_2 C],$$

worin $a_2 = (a + b) a - c b$.

Allgemein ist:

$$(f(x_1 x_2)) = \left(\frac{a x_1^m x_2^n + \dots + f x_1^v x_2^w}{a + \dots + f} \right) \\ = [\mathfrak{L} \mathfrak{L}_1 a_1 C a \mathfrak{L}_2 a_2 C \dots a \mathfrak{L}_x a_x C].$$

Ist nun $f(x_1 x_2) = 0$, so ist auch $(0) = 0$, also:

$$[\mathfrak{L} \mathfrak{L}_1 a_1 C a \mathfrak{L}_2 a_2 C \dots a \mathfrak{L}_x a_x C] = 0$$

das gesuchte planimetrische Product für die Gleichung n^{ten} Grades.

Da jedes $\mathfrak{R}$ den Factor x einmal, also jedes $\mathfrak{L}$ ihn so oft enthält, als die Exponentensumme des zugehörigen Gliedes der Gleichung beträgt, so ist das planimetrische Product von sovieltem Grade, als die Summe sämtlicher Exponenten der Gleichung beträgt. Es drückt daher ausser der Curve noch eine Menge von Geraden aus. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, kann man die Gleichung n^{ten} Grades *vor* der Umwandlung auf die Form bringen:

$$z_1 z_2 \dots z_n = c,$$

wo $z_1 \dots z_n$ lineare Functionen der Variablen x_1 und x_2 sind.

Auf diese Weise nimmt z. B. das planimetrische Product vom 2^{ten} Grade die Gestalt an: $(x a B c D e x) = 0$; und dasjenige vom 3^{ten} Grade: $[x a B c (x b) a C d E f x] = 0$. Die Verallgemeinerung dieser Theorie auf Curven höherer Grade s. in den Grassmann'schen Schriften.*)

b) Zahlen (aus Strecken [und Punkten]).**)

152. Der Flächentheil erschien uns als Product aus einem Punkte und einem Parallelogramm. Der erstere war eine geometrische, das letztere eine arithmetische Grösse. Bei der Bestimmung von *Punkten* erschien das als Zahlcoefficient auftretende Parallelogramm unwesentlich; daher konnten wir das progressive Product zweier Punkte als Gerade, statt als Strecke auffassen, und das regressive Product zweier Strecken (oder Geraden) als Punkt statt als Product eines Punktes und eines Parallelogramms.

Bei der Bestimmung von *Zahlen* wird uns der am Parallelogramm haftende Punkt nicht interessiren. Wir betrachten

*) Crelle's Journal Bd. 31. S. 111; Bd. 36. S. 177; Bd. 42. S. 187; Bd. 44. S. 1; Bd. 52. S. 254.

**) Vgl. G. A. II. 330—340.

daher nur das Parallelogramm, und da dasselbe als Product seiner beiden Seiten darstellbar ist, so genügen für unsere Betrachtung zwei Strecken e_1, e_2 , deren Product gleich 1 ist, so dass

$$(e_1 e_2) = 1.$$

Es finden dann alle am Schlusse der zweiten Abtheilung an diese Formel sich knüpfenden Erklärungen und Gesetze Geltung. Nur ist $(e_1 e_2)$ jetzt eine *Flächeneinheit* 2^{ter} Stufe.

Es ist also:

$$e_2 = | e_1;$$

$$e_1 = - | e_2;$$

$$\parallel e_1 = | e_2 = - e_1.$$

Da die Gesetze des Zeichens $|$ dieselben sind, wie die des Factors i , so nehmen wir zur näheren Bestimmung der Strecken e_1 und e_2 beide Zeichen als identisch an, und erhalten so die Formel:

$$e_2 = i \cdot e_1;$$

d. h.: die beiden Strecken e_1 und e_2 sind gleich lang und stehen auf einander senkrecht (normal). Sie bilden ein *Normalsystem*, auf welches sich alle folgenden Rechnungen beziehen.*)

Weiter hat man $(e_1 | e_1) = 1$; d. h.: das Product einer Strecke und ihrer (zu ihr senkrechten) Ergänzung ist gleich der *Flächeneinheit*; $(ne_1) | (pe_1) = np(e_1 | e_1) = np$, oder, wenn $n = p$ ist: $(ne_1) | (ne_1) = n^2$; d. h.: das Product zweier beliebigen auf einander senkrechten Strecken ist die mit dem Producte ihrer Masszahlen multiplicirte *Flächeneinheit*.

Weiter ist $(e_1 | e_2) = 0$, d. h.: das Product einer Strecke und der Ergänzung einer zu ihr senkrechten Strecke ist Null.

Wenn

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

so ist:

$$| a = \alpha_1 e_2 - \alpha_2 e_1;$$

und:

$$(a | a) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Statt $(a | a)$ schreibt man a^2 , nennt a^2 das *innere Quadrat* von a , und $\pm \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ seinen *numerischen Werth*.

*) Der in diesem Abschnitt behandelte Stoff bildet den Inhalt der sog. *rechnenden Geometrie*, in der es nur auf die *numerischen Werthe* der Strecken ankommt, und die, je nachdem Strecken allein, oder Strecken und Winkel den Gegenstand der Betrachtung bilden, in *rechnende Geometrie im engeren Sinne* und in *Trigonometrie* zerfällt.

Wenn

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2;$$

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2,$$

so ist:

$$[a | b] = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = [b | a].$$

oder:

$$[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) | (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)] = \alpha_1 \beta_1 [e_1 | e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2 | e_2].$$

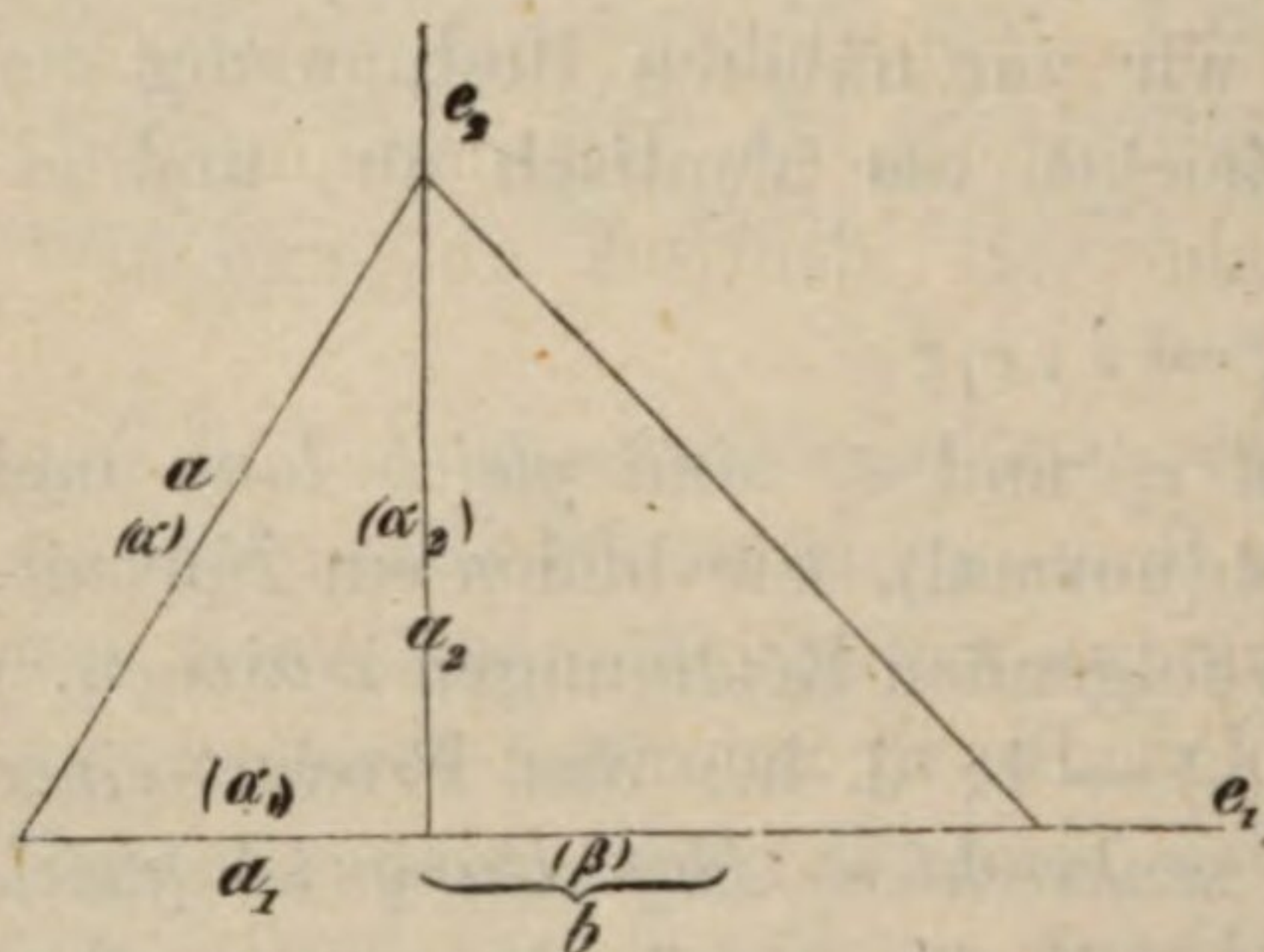
Ist $\alpha_1 = \beta_1$; $\alpha_2 = \beta_2$, so folgt:

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)^2 = (\alpha_1 e_1)^2 + (\alpha_2 e_2)^2,$$

oder, wenn wir $(\alpha_1 e_1) = a_1$; $(\alpha_2 e_2) = a_2$ setzen:

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Diese Formel drückt wieder den *Satz des Pythagoras* aus.



Sind a und b zwei Strecken, die einen beliebigen Winkel bilden, und

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = a_1 + a_2,$$

$$b = \beta e_1;$$

dann ist die Strecke a_1 die Projection von a auf e_1 nach e_2 ; mithin ist:

$$a_1 = \frac{(a \cdot e_2)}{(e_1 \cdot e_2)} \cdot e_1 = \frac{(a | e_1)}{(e_1 | e_1)} e_1 = (a | e_1) e_1.$$

Da nun

$$(a | e_1) = \alpha_1 (e_1 | e_1) + \alpha_2 (e_2 | e_1) = \alpha_1,$$

so ist in der That $a_1 = \alpha_1 e_1$.

Die Projection heisst *normal*, insofern Grundgebiet und Leitgebiet zu einander normal sind.

Bilden wir nun:

$$[a | b] = \alpha_1 \beta,$$

so haben wir den Satz: *Das innere Product zweier Strecken ist gleich dem Product aus dem numerischen Werthe der einen und dem der Projection der anderen auf ihr.*

Bilden wir weiter:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= [(a + b) | (a + b)] \\ &= [a | a] + [a | b] + [b | a] + [b | b] \\ &= a^2 + 2[a | b] + b^2 = \alpha^2 + 2\alpha_1 \beta + \beta^2; \end{aligned}$$

dann ist die Formel für $(a + b)^2$ der Ausdruck des sog. *allgemeinen Pythagoras*, und heisst, wenn γ der numerische Werth von $(a + b)$, α derjenige von a , β der von b ist:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2 \alpha_1 \beta.$$

Wenn a und b zwei zu einander senkrechte Strecken 153. sind, so dass

$$b = ai, \quad bi = -a,$$

dann sei:

$$a \cdot i^{\alpha_1} = xa + yb,$$

wenn a sich um den Winkel α dreht, und

$$\alpha_1 \text{ Rechte} = \alpha$$

ist. Durch Multiplication der letzten Formel mit i erhält man dann:

$$\begin{aligned} ai^{\alpha_1+1} &= xai + ybi, \\ &= xb - ya. \end{aligned}$$

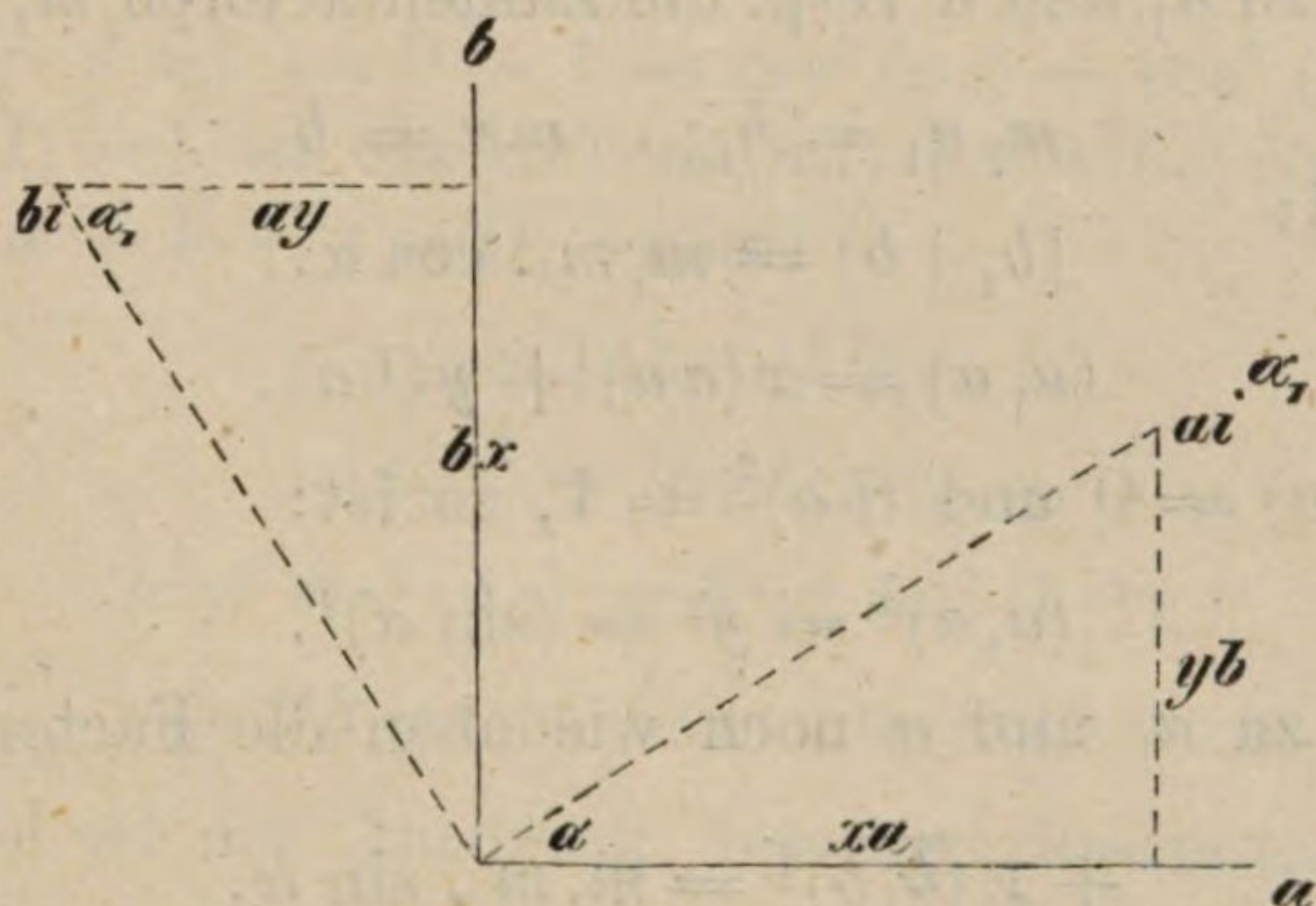
Andererseits ist:

$$ai^{\alpha_1+1} = bi^{\alpha_1};$$

also:

$$bi^{\alpha_1} = xb - ya.$$

Die Aenderung, durch welche von den beiden Strecken des Normalsystems (a, b) die eine a in $xa + yb$, die andere,



b in $xb - ya$ übergeht, heisst *circuläre Aenderung*. Wie die *lineale* Aenderung der Schiebung, so entspricht die *circuläre* der Drehung.

Da der numerische Werth von ai^{α_1} Eins ist, so ist:

$$+ \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Zur Bestimmung von x und y beachten wir, dass

$$ai^{\alpha_1} = xa + yb = xa + yai,$$

woraus folgt:

$$i^{\alpha_1} = x + iy.$$

Ferner ist:

$$1 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy),$$

und wenn man die untere Formel durch die obere dividirt:

$$i^{-\alpha_1} = x - iy.$$

Daher:

$$2x = i^{\alpha_1} + i^{-\alpha_1}; \quad 2yi = i^{\alpha_1} - i^{-\alpha_1};$$

endlich:

$$x = \frac{i^{\alpha_1} + i^{-\alpha_1}}{2}; \quad y = \frac{i^{\alpha_1} - i^{-\alpha_1}}{2i}.$$

Man setzt nun:

$$x = \cos \alpha; \quad y = \sin \alpha^*);$$

ausserdem:

$$y : x = \operatorname{tg} \alpha; \quad x : y = \cot \alpha.$$

154. Sei $ai^{\alpha_1} = a_1$; $a_1 = xa + yb$;

dann ist:

$$[a_1 | a] = x[a | a] + y[b | a].$$

Aber da b auf a normal, so ist $[b | a] = 0$; ferner:

$$[a | a] = a^2 = 1,$$

wenn a der Längeneinheit gleich ist; also:

$$[a_1 | a] = x = \cos \alpha.$$

Treten zu a_1 und a resp. die Zahlenfactoren m_1 und m , so ist, wenn

$$m_1 a_1 = b_1; \quad m a = b$$

gesetzt wird:

$$[b_1 | b] = m_1 m \cdot \cos \alpha.$$

Ferner ist:

$$(a_1 a) = x(aa) + y(ba).$$

Aber da $(aa) = 0$ und $(ba)^2 = 1$, so ist:

$$(a_1 a)^2 = y^2 = (\sin \alpha)^2.$$

Treten zu a_1 und a noch wie oben die Factoren m_1 und m , so ist

$$+ \sqrt{(b_1 b)^2} = m_1 m \cdot \sin \alpha.$$

*Demnach ist das innere Product zweier Strecken gleich dem Product ihrer numerischen Werthe und des Cosinus ihres Zwischenwinkels; dagegen der numerische Werth des äusseren Productes zweier Strecken gleich dem Product ihrer numerischen Werthe und des Sinus ihres Zwischenwinkels.**)*

*) Vgl. die Anmerkung auf S. 58.

**) Vgl. G. A. I. S. 64.

Specielle Fälle:

$$\begin{aligned} a_1 &= a; & a_1 &= b; \\ \cos(aa) &= [a | a] = 1; & \cos(ab) &= [a | b] = 0; \\ \text{oder: } \cos 0 &= 1; & \cos(1R) &= 0; \\ \sin(aa) &= (aa) = 0; & \sin(ab) &= (ab) = 1; \\ \sin 0 &= 0. & \sin(1R) &= 1. \end{aligned}$$

Sei $c = xa + yb$, und $\gamma\alpha\beta$ resp. die numerischen Werthe von cab ; dann ist:

$$\begin{aligned} [a | c] &= x\alpha^2; & [a | c] &= \alpha\gamma \cdot \cos(ac); \\ [b | c] &= y\beta^2; & [b | c] &= \beta\gamma \cdot \cos(bc); \end{aligned}$$

folglich:

$$x\alpha^2 = \alpha\gamma \cos(ac); \quad y\beta^2 = \beta\gamma \cos(bc);$$

$$x = \frac{\gamma}{\alpha} \cos(ac); \quad y = \frac{\gamma}{\beta} \cos(bc);$$

und:

$$\frac{c}{\gamma} = \frac{a}{\alpha} \cos(ac) + \frac{b}{\beta} \cos(bc).$$

Ist $c = xa + yb$; $d = x_1a + y_1b$; dann ist:

$$\begin{aligned} \cos(cd) &= [c | d] = xx_1 + yy_1 \\ &= \cos(ac) \cos(ad) + \cos(bc) \cos(bd). \end{aligned}$$

Für $c = d$ ist $\cos 0 = 1 = \cos^2(ac) + \cos^2(bc)$.

Für $(cd) = 1$ ist $\cos(ac) \cos(ad) + \cos(bc) \cos(bd) = 0$.

Wenn $a + b + c = 0$, so ist:

$$ac + bc = 0;$$

$$(ac)^2 = (bc)^2;$$

oder:

$$\alpha^2\gamma^2 \sin^2(ac) = \beta^2\gamma^2 \sin^2(bc);$$

d. h.:

$$\alpha : \beta = \sin(bc) : \sin(ac).$$

Diese Formel ist der Ausdruck des sog. *Sinussatzes* der Trigonometrie.

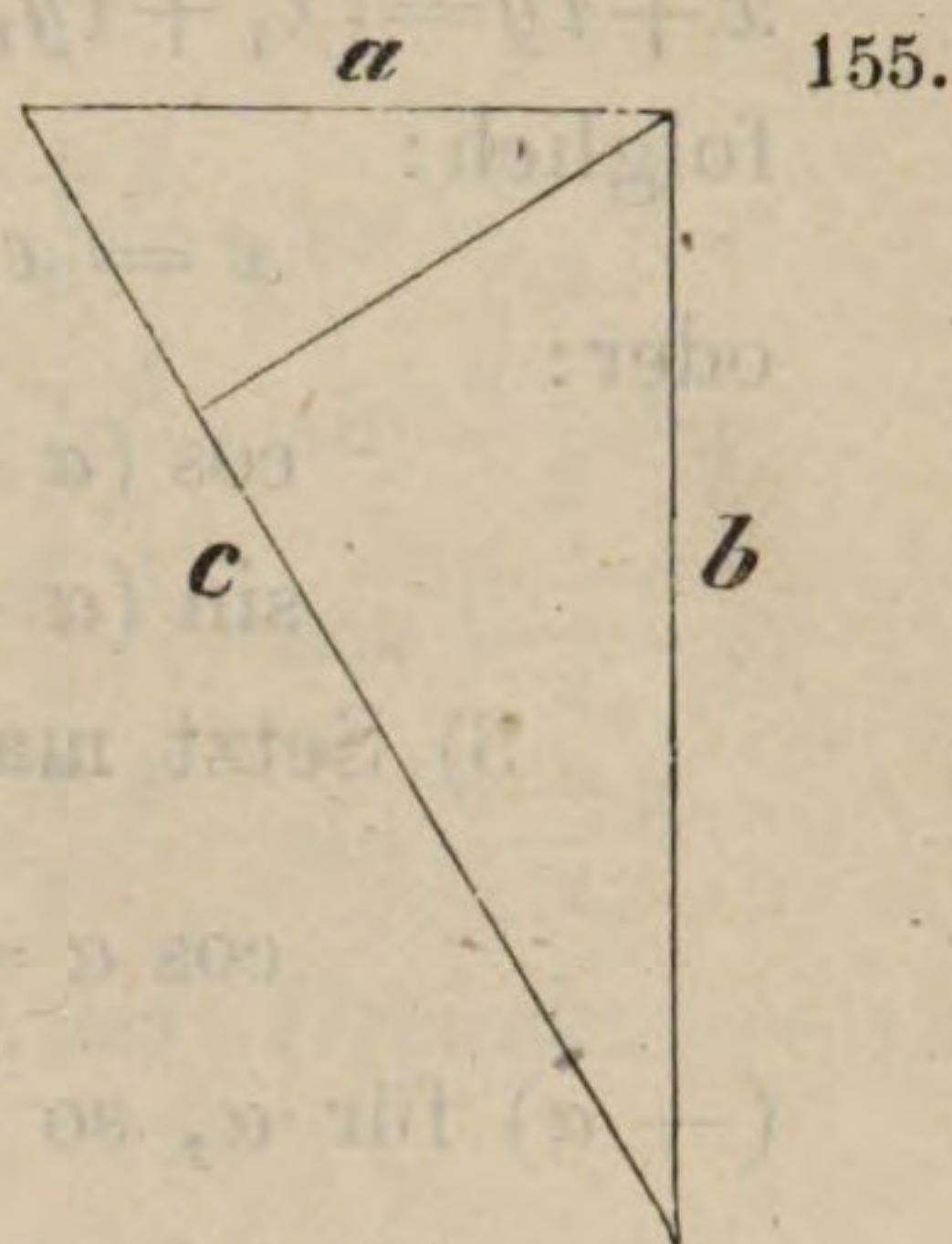
Setzt man in der Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2[a | b] + b^2$$

für $(a | b)$ seinen Werth, und für a und b ihre numerischen Werthe, so folgt, wenn $a + b = c$ ist:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta \cos(ab) + \beta^2$$

als Ausdruck des sog. *Projections-* und des *Cosinussatzes*.



155.

156.

157.

158. *Ableitung der wichtigsten trigonometrischen Grundformeln.*

1) Aus den Formeln: $x^2 + y^2 = 1$; $x = \cos \alpha$; $y = \sin \alpha$ folgt sogleich:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

2) Sei $i^{\alpha_1} = x_1 + i y_1$; $i^{\beta_1} = x_2 + i y_2$; $i^{\alpha_1 + \beta_1} = x + i y$; dann ist:

$$x + i y = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2),$$

folglich:

$$x = x_1 x_2 - y_1 y_2; \quad y = y_1 x_2 + x_1 y_2;$$

oder:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

3) Setzt man in den Ausdrücken:

$$\cos \alpha = \frac{i^{\alpha} + i^{-\alpha}}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{i^{\alpha} - i^{-\alpha}}{2i}$$

($-\alpha$) für α , so folgt:

$$\cos(-\alpha) = \frac{i^{-\alpha} + i^{\alpha}}{2} = \cos \alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = \frac{i^{-\alpha} - i^{\alpha}}{2i} = -\sin \alpha.$$

4) Setzt man in 2) β negativ, so folgt:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

5) Setzt man in 2) $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$, also $\alpha = \beta$, so folgt:

$$x = x_1^2 - y_1^2; \quad y = 2 x_1 y_1;$$

oder:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

6) Da $x_1^2 + y_1^2 = 1$, und nach 5) $x_1^2 - y_1^2 = x$, so folgt:

$$x_1^2 = \frac{1+x}{2}; \quad y_1^2 = \frac{1-x}{2},$$

oder:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}}; \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}},$$

oder:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

7) Setzt man in den Ausdrücken für $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ statt α die Werthe 0, 1, 2, so folgt:

$$\begin{aligned}\cos 0 &= \frac{1+1}{2} = 1; & \sin 0 &= \frac{1-1}{2i} = 0; \\ \cos 1 &= \frac{i+i^{-1}}{2} = \frac{i-i}{2} = 0; & \sin 1 &= \frac{i-i^{-1}}{2i} = \frac{i+i}{2i} = 1; \\ \cos 2 &= \frac{-1+(-1)}{2} = -1; & \sin 2 &= \frac{-1-(-1)}{2i} = 0.\end{aligned}$$

8) Sei $\alpha = x + y$; $\beta = x - y$; $\frac{\alpha + \beta}{2} = x$; $\frac{\alpha - \beta}{2} = y$;
dann ist:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos x \cos y = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin x \sin y = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin x \cos y = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos x \sin y = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Einige Formeln von den Winkeln des Dreiecks. — 159.

1) $\alpha + \beta + \gamma = 2$.

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin(2 - \alpha - \beta) \\ &= \frac{i^\alpha - i^{-\alpha} + i^\beta - i^{-\beta} + i^{2-\alpha-\beta} - i^{-2+\alpha+\beta}}{2i} \\ &= \frac{i^\alpha - i^{-\alpha} + i^\beta - i^{-\beta} - i^{-(\alpha+\beta)} + i^{(\alpha+\beta)}}{2i} \\ &= \frac{(i^\alpha + 1)(i^\beta + 1) - (i^{-\alpha} + 1)(i^{-\beta} + 1)}{2i} \\ &= \frac{(i^\alpha + 1)(i^\beta + 1) - \left(\frac{i^\alpha + 1}{i^\alpha} \cdot \frac{i^\beta + 1}{i^\beta}\right)}{2i} = \frac{(i^\alpha + 1)(i^\beta + 1)(i^{\alpha+\beta} - 1)}{2i \cdot i^{\alpha+\beta}} \\ &= \frac{(i^\alpha + 1)(i^\beta + 1)(i^{\alpha+\beta} - 1)}{2 \cdot i \cdot i^{\frac{\alpha}{2}} \cdot i^{\frac{\beta}{2}} \cdot i^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\ &= \frac{\left(i^{\frac{\alpha}{2}} + i^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \left(i^{\frac{\beta}{2}} + i^{-\frac{\beta}{2}}\right) \left(i^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - i^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)}{2i} \\ &= 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \frac{i^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1} - i^{-\frac{\alpha+\beta}{2}-1}}{2} \\ &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \frac{i^{\frac{-2+\alpha+\beta}{2}} + i^{\frac{-\alpha+\beta}{2}} (-i^{-1})}{2} \\ &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \frac{i^{\frac{-2+\alpha+\beta}{2}} + i^{\frac{2-\alpha-\beta}{2}}}{2} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

2) $\alpha + \beta + \gamma = 4$. —

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin (4 - \alpha - \beta) \\ &= \frac{i^\alpha - i^{-\alpha} + i^\beta - i^{-\beta} + i^{4-\alpha-\beta} - i^{-4+\alpha+\beta}}{2i} \\ &= \frac{i^\alpha - i^{-\alpha} + i^\beta - i^{-\beta} + i^{-(\alpha+\beta)} - i^{\alpha+\beta}}{2i} \\ &= \frac{-(i^\alpha - 1)(i^\beta - 1) + (i^{-\alpha} - 1)(i^{-\beta} - 1)}{2i} \\ &= \frac{(i^\alpha - 1)(i^\beta - 1)(1 - i^{\alpha+\beta})}{2i \cdot i^{\alpha+\beta}} = 4 \cdot \frac{i^\alpha - 1}{2i \cdot i^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{i^\beta - 1}{2i \cdot i^{\frac{\beta}{2}}} \cdot \frac{i^{\alpha+\beta} - 1}{2i \cdot i^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\ &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

3) $\alpha + \beta + \gamma = 2$. —

$$\begin{aligned} &(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \\ &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\alpha + \gamma) \\ &\quad + \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{2} = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \\ &\quad + \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{2} \\ &(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1) \\ &\quad = 2 \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &= 16 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; \end{aligned}$$

also:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1 = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2};$$

und endlich:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

(Auch analog wie 1) abzuleiten.)

160. *Erweiterungen.* 1) Gegeben seien drei Punkte A, B, C ; ferner sei:

$$A + B = 2X_3; \quad B + C = 2X_1; \quad C + A = 2X_2.$$

Ein Punkt O sei so bestimmt, dass

$$\begin{aligned} (O - A) \cdot i^\beta &= (O - C); \quad (O - C) \cdot i^\alpha = (O - B); \\ (O - B) \cdot i^\gamma &= (O - A); \quad \text{also: } \alpha + \beta + \gamma = 4. \end{aligned}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} (O - A) + (O - B) &= 2(O - X_3); \\ (O - B) + (O - C) &= 2(O - X_1); \\ (O - C) + (O - A) &= 2(O - X_2). \end{aligned}$$

Ferner:

$$(A - B) = (O - B) - (O - A);$$

$$(B - C) = (O - C) - (O - B);$$

$$(C - A) = (O - A) - (O - C).$$

Setzen wir nun:

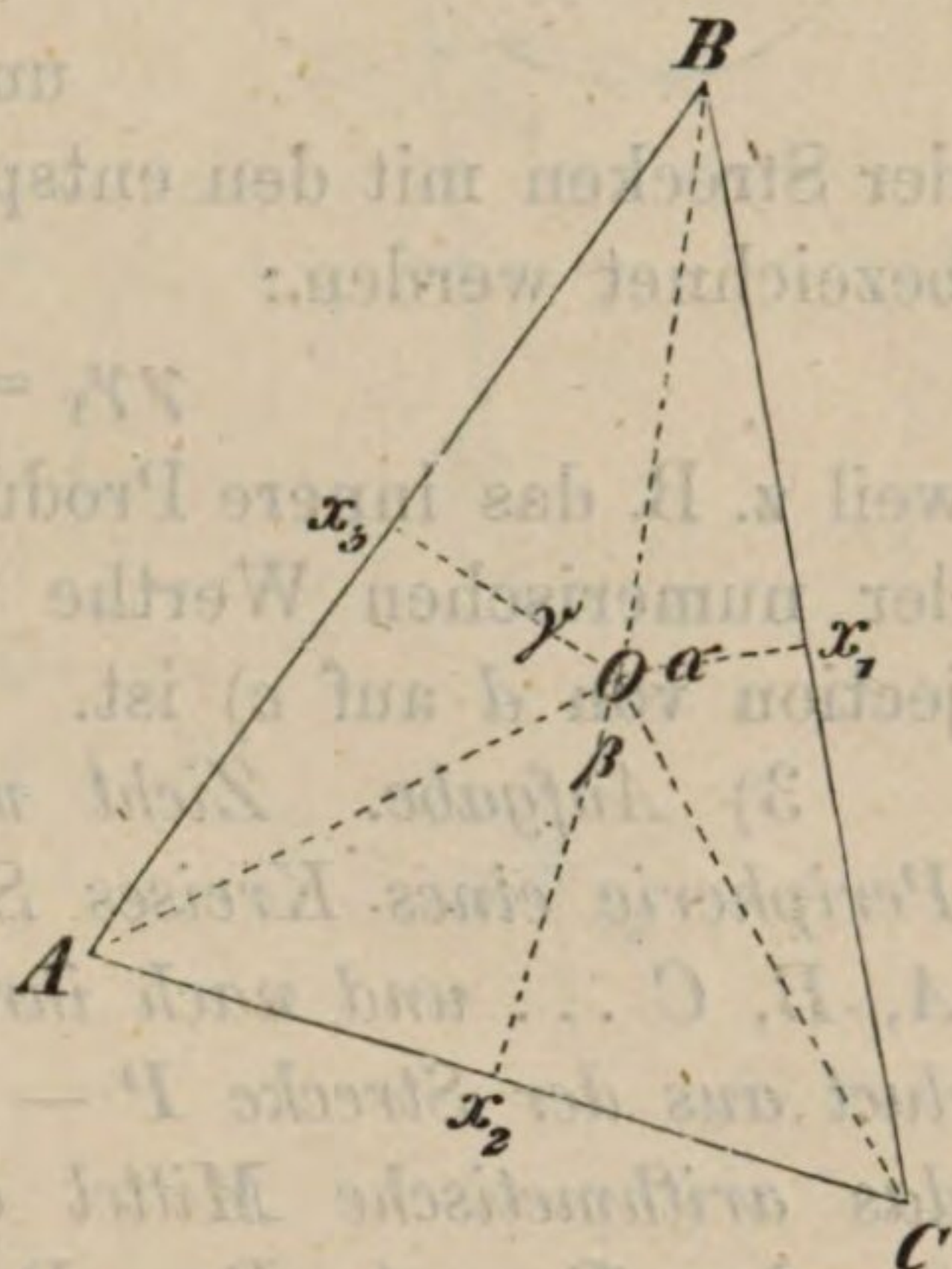
$$(O - X_1) = x_1; \quad (O - X_2) = x_2; \quad (O - X_3) = x_3; \\ (C - A) = b; \quad (A - B) = c; \quad (B - C) = a,$$

so ist:

$$\begin{cases} (O - A) = x_3 - \frac{c}{2} = x_2 + \frac{b}{2}; \\ (O - B) = x_1 - \frac{a}{2} = x_3 + \frac{c}{2}; \\ (O - C) = x_2 - \frac{b}{2} = x_1 + \frac{a}{2}; \end{cases}$$

folglich:

$$\begin{cases} \left(x_2 + \frac{b}{2}\right) i^\beta = \left(x_2 - \frac{b}{2}\right); \\ \left(x_3 + \frac{c}{2}\right) i^\gamma = \left(x_3 - \frac{c}{2}\right); \\ \left(x_1 + \frac{a}{2}\right) i^\alpha = \left(x_1 - \frac{a}{2}\right). \end{cases}$$



Multipliziert:

$$\left(x_1 + \frac{a}{2}\right) \left(x_2 + \frac{b}{2}\right) \left(x_3 + \frac{c}{2}\right) \\ = \left(x_1 - \frac{a}{2}\right) \left(x_2 - \frac{b}{2}\right) \left(x_3 - \frac{c}{2}\right);$$

oder:

$$cx_1x_2 + ax_2x_3 + bx_3x_1 + \frac{abc}{4} = 0;$$

oder:

$$\frac{c}{2x_3} + \frac{a}{2x_1} + \frac{b}{2x_2} = -\frac{a}{2x_1} \cdot \frac{b}{2x_2} \cdot \frac{c}{2x_3}.$$

Beachten wir nun, dass numerisch:

$$\frac{a}{2} : x_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{b}{2} : x_2 = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}; \quad \frac{c}{2} : x_3 = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

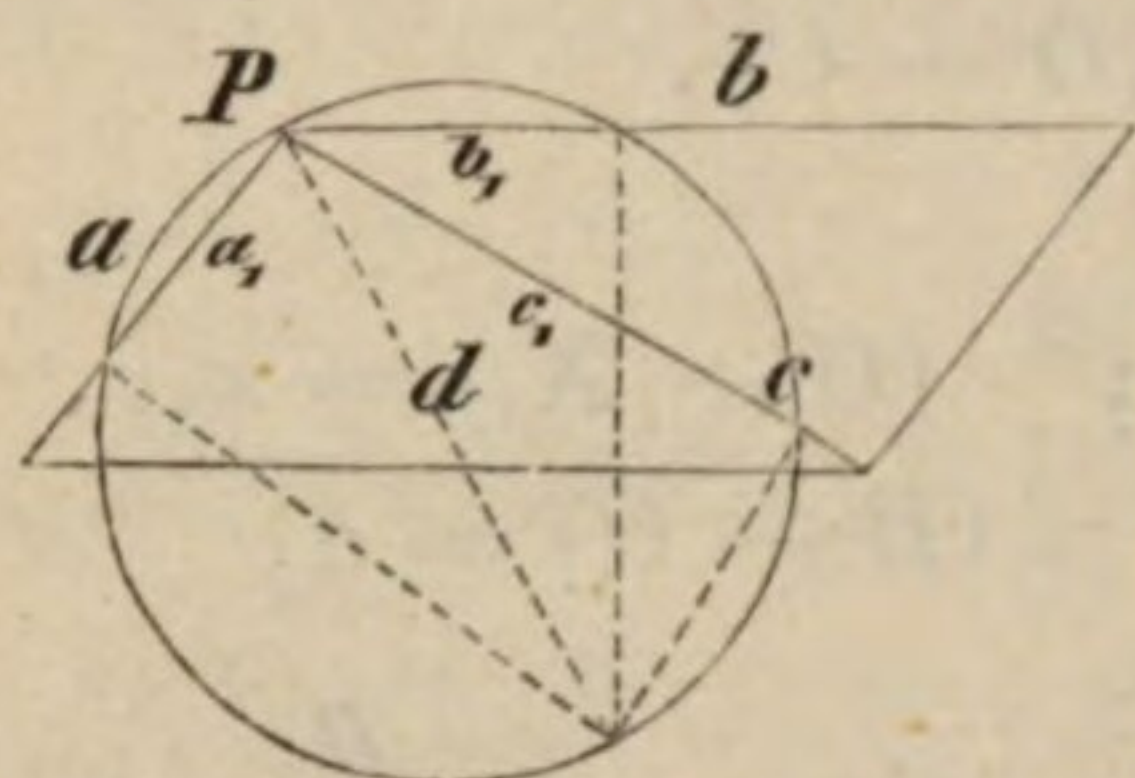
so lautet die letzte Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

2) Aufgabe. Zu beweisen: Wenn man durch eine Ecke eines Parallelogramms eine Kreisl Linie legt, und aus derselben Ecke die Diagonale zieht, so ist das numerische Product aus der Diagonale und der in ihr liegenden Sehne gleich der Summe

der numerischen Producte aus den beiden anstossenden Seiten und ihren resp. Sehnenabschnitten. *)

Seien ab die Seiten, c die Diagonale des Parallelogramms,



a_1, b_1, c_1 die entsprechenden Sehnen; d der aus der Ecke P gezogene Durchmesser; dann ist:

$$c = a + b;$$

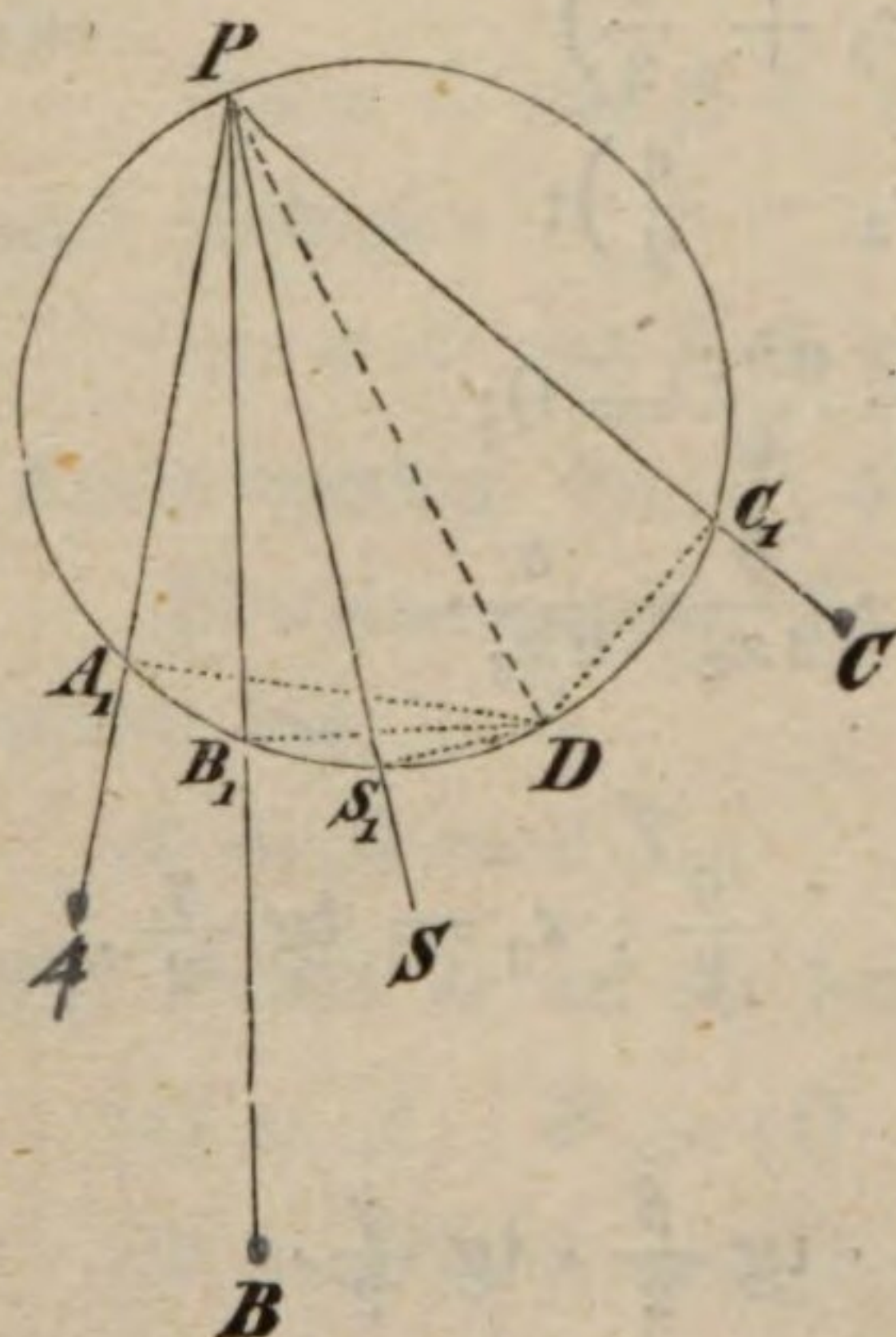
$$[c | d] = [a | d] + [b | d],$$

und wenn die numerischen Werthe der Strecken mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet werden:

$$\gamma\gamma_1 = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1,$$

weil z. B. das innere Product aus c und d gleich dem Producte der numerischen Werthe von c und c_1 (der normalen Projection von d auf c) ist.

162. 3) Aufgabe. Zieht man von einem Punkte P in der Peripherie eines Kreises Strecken nach n beliebigen Punkten $A, B, C \dots$ und nach ihrem Mittelpunkte S , so ist das Product aus der Strecke $P - S$ und der auf ihr liegenden Sehne das arithmetische Mittel aus der Summe der Producte der Strecken $P - A, P - B, \dots$ und der zugehörigen Sehnen.



Bezeichnen wir die von P ausgehenden Linientheile $PA, PB, \dots$ mit $a, b, \dots$; dann ist:

$$S = \frac{A + B + C + \dots}{n}$$

$$SP = \frac{AP + BP + CP + \dots}{n};$$

$$s = \frac{a + b + c + \dots}{n};$$

$$[s | d] = \frac{[a | d] + [b | d] + [c | d] + \dots}{n};$$

folglich, wenn wir die numerischen Werthe der Linientheile mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnen:

$$\sigma\sigma_1 = \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 + \dots}{n}; \text{ w. z. b. w.}$$

*) S. G. Geometr. Analys. S. 26.

Verbindet man einen Punkt X mit dem Mittelpunkte 163. eines Kreises durch eine Gerade, welche den Kreis in den Punkten X_1 und X_2 schneidet, so heisst das Product der numerischen Werthe von $(X - X_1)$ und $(X - X_2)$ der *Doppelabstand* des Punktes vom Kreise.*) Also:

$$\alpha_1 = (X - X_1)(X - X_2).$$

Ist O_1 der Mittelpunkt und r_1 der Radius des Kreises, so ist:

$$X_1 - O_1 = r_1; \quad X_2 - O_1 = r_1;$$

also:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (X - O_1 - r_1)(X - O_1 + r_1) \\ &= (X - O_1)^2 - r_1^2. \end{aligned}$$

Wenn nun $O_2, O_3, \dots$ die Mittelpunkte; $r_2, r_3, \dots$ die Radien, und $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ die Doppelabstände von X für andere Kreise bezeichnen, so ist:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_3 + \dots \\ &= \alpha_1 [(X - O_1)^2 - r_1^2] \\ &\quad + \alpha_2 [(X - O_2)^2 - r_2^2] + \dots \end{aligned}$$

Sei nun ein fester Punkt S angenommen, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} (X - O_r)^2 &= (X - S + S - O_r)^2 \\ &= (X - S)^2 + 2[(X - S)(S - O_r)] + (S - O_r)^2; \end{aligned}$$

daher, wenn noch

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots = \alpha$$

gesetzt wird:

$$\Sigma = \alpha(X - S)^2 + 2[(X - S)(\alpha S - \alpha_1 O_1 - \alpha_2 O_2 - \dots)] + \mu,$$

worin

$$\begin{aligned} \mu &= \alpha_1 (S - O_1)^2 + \alpha_2 (S - O_2)^2 + \dots \\ &\quad - \alpha_1 r_1^2 - \alpha_2 r_2^2 - \dots \end{aligned}$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

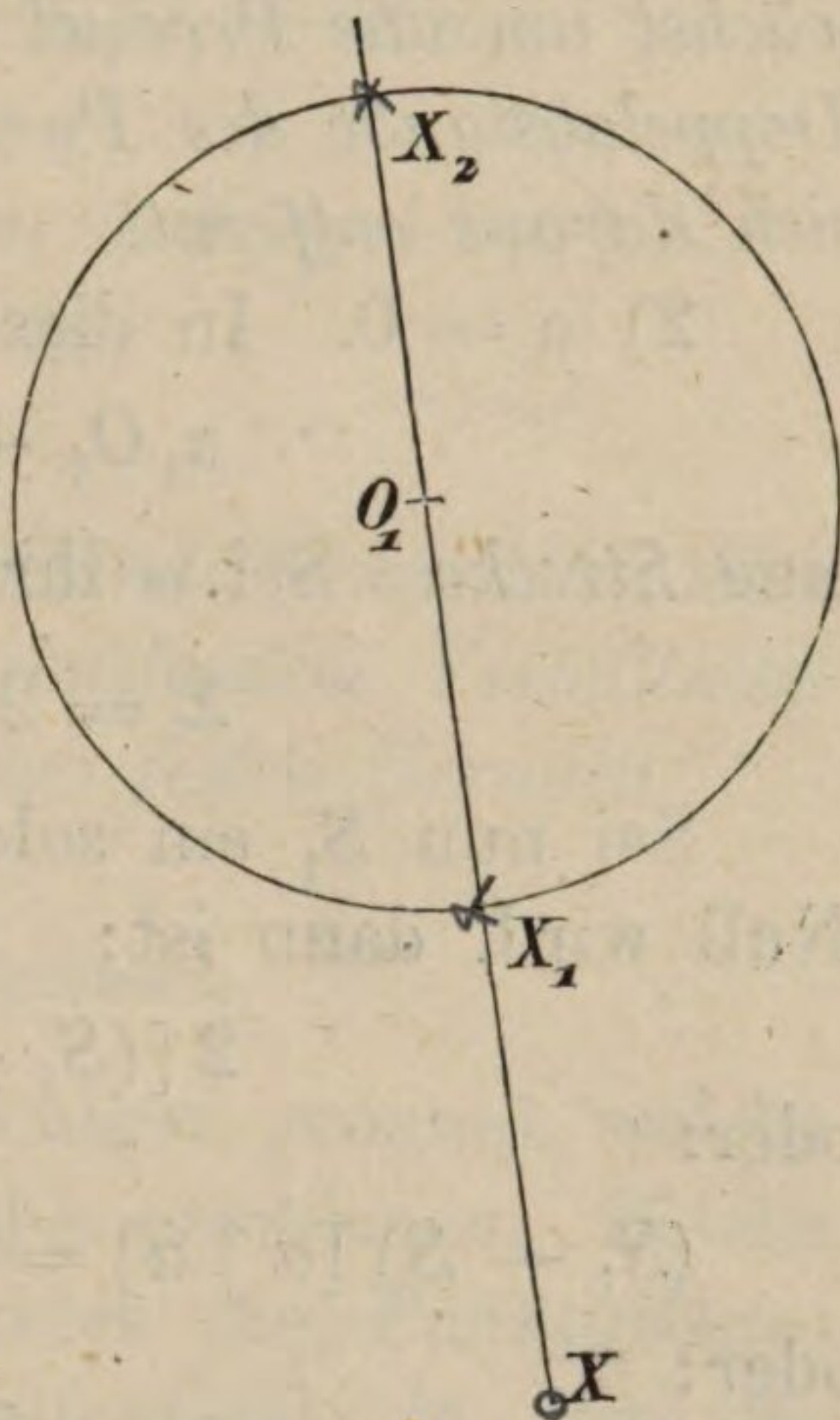
1) $\alpha \leq 0$. Dann kann man S so wählen, dass

$$\alpha S - \alpha_1 O_1 - \alpha_2 O_2 - \dots = 0,$$

oder:

$$S = \frac{\alpha_1 O_1 + \alpha_2 O_2 + \dots}{\alpha},$$

*) Vgl. G. A. II. 341—343.



d. h. dass S der *Mittelpunkt* der Punkte $O_1, O_2, \dots$ ist. Dann ist

$$\Sigma = \alpha (X - S)^2 + \mu.$$

Die *Vielfachensumme* der *Doppelabstände* eines variablen Punktes von mehreren festen Kreisen erreicht ihr Minimum (oder, wenn α negativ ist, ihr Maximum), wenn der Punkt die Mitte zwischen den Mittelpunkten der Kreise bildet. Sie wächst um das Product aus ihrer Coefficientensumme und dem Doppelabstande des Punktes von dieser Mitte, wenn der Punkt sich daraus entfernt.

2) $\alpha = 0$. In diesem Falle ist

$$\alpha_1 O_1 + \alpha_2 O_2 + \dots = a,$$

eine *Strecke*. Sei α ihr numerischer Werth. Dann ist

$$\Sigma = 2 [(X - S) | a] + \mu.$$

Sei nun S_1 ein solcher Punkt X , für welchen Σ gleich Null wird, dann ist:

$$2 [(S_1 - S) | a] + \mu = 0,$$

oder:

$$(S_1 - S) [a | a] = -\frac{\mu}{2} \cdot a; \quad S_1 - S = -\frac{\mu \cdot a}{2 \alpha^2},$$

oder:

$$S_1 = S - \frac{\mu \cdot a}{2 \alpha^2};$$

Nun wird:

$$\Sigma = 2 [(X - S_1 + S_1 - S) | a] + \mu = 2 [(X - S_1) | a].$$

Hieraus folgt: Die *Vielfachensumme* wird Null, wenn der Punkt auf der in S zu a errichteten Senkrechten liegt. Andernfalls ist sie gleich dem doppelten Product aus dem numerischen Werth der Strecke a und dem Abstände des Punktes von dieser Senkrechten.

Ist endlich $a = 0$, so ist $\Sigma = \mu$, also constant.

Sind insbesondere die *Radien* der Kreise alle gleich 0, so verwandeln sich die Kreise in *Punkte*, ohne dass die Formeln sich wesentlich ändern. Der Doppelabstand ist dann das Quadrat des einfachen Abstandes.

Rücken dagegen die Mittelpunkte der Kreise in unendliche Entfernung, so geht die Kreislinie in eine *Gerade* über, der Abstand $X - X_2$ wird unendlich gross; d. h. er kann für alle Kreise als gleich angesehen, und es kann Σ durch

ihn dividirt werden. Dann ist der Doppelabstand der einfache Abstand des Punktes von der Geraden, und

$$\alpha_1 = (X - X_1).$$

Nehmen wir auf der Geraden eine der Längeneinheit gleiche Strecke a an, so ist

$$\alpha_1 = (X - X_1) a_1 = X a_1 - X_1 a_1 = X a_1.$$

Analog:

$$\alpha_2 = (X - X_2) a_2 = X a_2 - X_2 a_2 = X a_2;$$

also:

$$\Sigma = \alpha_1 X a_1 + \alpha_2 X a_2 + \dots = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots) X,$$

oder, wenn $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots = \alpha a$ ist:

$$\Sigma = \alpha (a X),$$

d. h.: *Die Vielfachensumme der Abstände eines variablen Punktes von festen Geraden steht in constantem Verhältnisse zu seinem Abstände von einer bestimmten festen Geraden.*

2. Zusammengesetzte Grössen.

Einfache Grössen wurden oben diejenigen genannt, welche 164. als Producte von Grössen ersten Grades erschienen. Solche Grössen waren: im Gebiete des Punktes die Punktgrösse; in dem der Geraden: Strecke und Linientheil; in dem der Ebene: Parallelogramm und Flächentheil. — Dagegen wurden die Curven sammt den von ihnen begrenzten Theilen der Ebene noch nicht unter dem Gesichtspunkte der Grösse betrachtet.

Auf diesen Standpunkt gelangen wir durch eine Verallgemeinerung der Begriffe.*)

Sei nämlich ein einfacher Punkt X bestimmt durch die Gleichung:

$$X = x e_1 + y e_2 + z e_3, \quad \text{wo} \quad x + y + z = 1;$$

dann ist:

$$z = 1 - x - y;$$

und:

$$X = x(e_1 - e_3) + y(e_2 - e_3) + e_3.$$

Nimmt man nun an, dass die Strecken $(e_1 - e_3)$ und $(e_2 - e_3)$ senkrecht auf einander stehen, so sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten von X ; jedem Werthepaare von

*) Vgl. G. A. II. 393.

Schlegel, Syst. d. Raumlehre.

x und y entspricht ein bestimmter Punkt X , und alle Punkte X , deren Coordinaten einer Zahlengleichung vom Grade n genügen, liegen auf einer Curve vom Grade n .

Sei nun

$$\mathfrak{F}(x, y) = 0$$

diese Gleichung; dann heisst $\mathfrak{F}(x, y)$ eine *Function* von x und y , und ist eine Grösse, welche für beliebige Werthgruppen der *constanten* Zahlen stets bestimmte Werthe hat.

Ist nun zunächst $\mathfrak{F}(x, y)$ eine Function *ersten* Grades, also von der Form:

$$\mathfrak{F}(x, y) = ax + by + c;$$

dann ist $\mathfrak{F}(x, y)$ in ganz analoger Weise aus den Grössen $x, y, 1$ mittelst der Zahlen a, b, c abgeleitet, wie X aus den Grössen e_1, e_2, e_3 , mittelst der Zahlen x, y, z . — Die Function $\mathfrak{F}(x, y)$ heisst nun diejenige Function, zu welcher die Curve 1^{ten} Grades (Gerade) gehört, deren Coordinaten der Gleichung $\mathfrak{F}(x, y) = 0$ genügen.

Ist allgemein $\mathfrak{F}(x, y)$ eine Function n^{ten} Grades, dann ist $\mathfrak{F}(x, y)$ aus den einzelnen Functionen von x und y abgeleitet, d. h. aus den Producten ihrer Potenzen. Diese Producte kann man nun als ursprüngliche Einheiten betrachten, vom Grade der Summe ihrer Exponenten. Diese Einheiten sind in der That von einander unabhängig, da die Gleichung $\mathfrak{F}(x, y) = 0$ für jeden Werth von x und y nur dann befriedigt wird, wenn alle Coefficienten Null sind.

Es ist nun $\mathfrak{F}(x, y)$ eine einfache Grösse, wenn es als Vielfachensumme der *einfachen* Einheiten $x, y, 1$ darstellbar ist; d. h. wenn es eine Function vom 1^{ten} Grade ist; dagegen eine zusammengesetzte Grösse, wenn es als Vielfachensumme der Producte dieser Einheiten erscheint.

In gleichem Sinne heissen nun auch die zur Gleichung $\mathfrak{F}(x, y) = 0$ gehörigen Curven entweder einfach oder zusammengesetzt.

165. *Die Kreisfunction.**) — Die erste der zusammengesetzten Functionen in Bezug auf die Einfachheit der durch sie dargestellten Curve ist die Kreisfunction. Sie ist ein specieller Fall der allgemeinen Function 2^{ten} Grades:

*) Vgl. G. A. II. 394—399.

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f,$$

und hat die Form:

$$(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta,$$

ist also aus den vier Einheiten $(x^2 + y^2)$, x , y , 1 ableitbar. Sie heisst α -fach, wenn das erste Glied noch den Coefficienten α bei sich hat.

Statt aus den vier *Einheiten* kann jede Kreisfunction aus vier anderen Kreisfunctionen abgeleitet werden.

Wenn $P(x_1, y_1)$ ein beliebiger Punkt der Ebene, O der Mittelpunkt eines Kreises, und r sein Radius ist, so ist der *Doppelabstand* des Punktes vom Kreise, wie wir oben sahen, gleich

$$(P - O)^2 - r^2.$$

Aber wenn $X(x, y)$ ein variabler Punkt, so ist:

$$\mathfrak{F}(x, y) = (X - O)^2 - r^2 = 0$$

die Gleichung des Kreises, auf dem X liegen muss. Folglich ist der *Doppelabstand* des Punktes P auch ausgedrückt durch:

$$\mathfrak{F}(x_1, y_1).$$

Wenn $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ drei Kreisfunctionen von x und y sind, und $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ die Kreise, deren Gleichungen $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, $\mathfrak{F}_3 = 0$; wenn dann

$$\mathfrak{F}_3 = \alpha_1 \mathfrak{F}_1 + \alpha_2 \mathfrak{F}_2 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 1)$$

ist, so haben die Kreise κ_1 und κ_2 zwei Durchschnittspunkte, deren Coordinaten durch das System $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = 0$ bestimmt sind. Dann ist aber auch $\mathfrak{F}_3 = 0$; d. h. der Kreis κ_3 geht durch dieselben beiden Durchschnittspunkte. *Hiernach haben drei Kreise, welche in einer Zahlbeziehung stehen, zwei Punkte gemeinsam. Auch haben sie eine Gerade gleichen Doppelabstandes*, deren Gleichung $\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2 = 0$ ist, woraus auch $\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_3 = 0$ folgt.

Wenn zwei Kreise ($\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$) gleichen Doppelabstand von irgend einem Punkte haben sollen, so ist für diesen Punkt:

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2; \text{ oder: } \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2 = 0.$$

Da in dem Ausdruck $\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2$ die quadratischen Glieder sich heben, so stellt die Gleichung $\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2 = 0$ eine *Gerade* vor. *Zwei Kreise haben also stets eine Gerade gleichen Doppelabstandes.*

Kommt noch ein dritter Kreis ($\mathfrak{F}_3 = 0$) hinzu, der dieselbe Bedingung erfüllen soll, so stellt das System $\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2 = 0$; $\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_3 = 0$ den Durchschnittspunkt zweier Geraden vor. *Folglich haben drei Kreise stets einen Punkt gleichen Doppelabstandes.*

Wenn vier Kreise in einer Zahlbeziehung stehen, so dass

$$\mathfrak{F}_4 = \alpha_1 \mathfrak{F}_1 + \alpha_2 \mathfrak{F}_2 + \alpha_3 \mathfrak{F}_3 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1),$$

so ist für den Punkt gleichen Doppelabstandes zwischen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$:

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3;$$

folglich auch:

$$\mathfrak{F}_4 = \mathfrak{F}_1;$$

d. h.: *vier Kreise, die in einer Zahlbeziehung stehen, haben denselben Punkt gleichen Doppelabstandes.*

166. „Wenn der Punkt A des gleichen Doppelabstandes von vier Kreisen ausserhalb eines der Kreise liegt, so ist der Doppelabstand von diesem Kreise gemäss der Definition positiv, also auch der Doppelabstand von den übrigen Kreisen positiv; A liegt dann zugleich ausserhalb der übrigen Kreise. Zieht man von A die Tangenten an die vier Kreise, so müssen diese gleich sein, weil für jeden Kreis das Quadrat der von einem äusseren Punkte gezogenen Tangente gleich dem Doppelabstande dieses Punktes ist. Schlägt man also um A einen Kreis, dessen Radius gleich jenen Tangenten ist, so werden alle vier Kreise von diesem letzteren Kreise senkrecht geschnitten. — Liegt hingegen A innerhalb eines der Kreise, so muss es auch innerhalb der anderen liegen. Zieht man dann von A in irgend einem der Kreise diejenige Sehne, die durch A halbiert wird, so ist das Quadrat der halben Sehne gleich dem Doppelabstande des Punktes A von diesem Kreise; zieht man also in allen vier Kreisen die durch A halbirten Sehnen, so müssen diese alle einander gleich sein. Schlägt man endlich um A mit der halben Sehne s einen Kreis, so wird dieser Kreis von jedem der vier Kreise im Durchmesser, d. h. so geschnitten, dass die beiden Durchschnittspunkte die Endpunkte eines und desselben durch diesen Kreis gezogenen Durchmessers sind.

Man kann diesen in Durchmessern geschnittenen Kreis als einen senkrecht schneidenden betrachten, dessen Radius

imaginär $= r\sqrt{-1}$ ist, während A der Mittelpunkt bleibt, und erlangt dadurch den Vortheil eines gemeinschaftlichen Ausdrucks. Unser Satz würde dann so lauten: Vier Kreise stehen dann (und nur dann) in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn sie von *einem* Kreise senkrecht geschnitten werden, und zwar ist der Mittelpunkt dieses Kreises der Punkt des gleichen Doppelabstandes von irgend dreien der vier Kreise, und der Radius gleich der Quadratwurzel dieses Abstandes. Wir können dies auch so ausdrücken: Das aus drei Kreisen ableitbare Gebiet ist die Gesamtheit der Kreise, welche von einem und demselben Kreise senkrecht geschnitten werden. In diesem Sinne stellt also der letztgenannte Kreis jenes Gebiet, d. h. das aus Kreisen erzeugbare Gebiet 3^{ter} Stufe dar, während das Gebiet 2^{ter} Stufe durch einen Verein zweier Punkte dargestellt wurde.“*)

b) Vereine von Grössen.

ℵ. Vereine von abhängigen Grössen.

a. Mit beschränkter Gliederzahl. — Punktepaaire und Linienpaaire.

1. Anharmonisches und harmonisches Verhältniss.

Zwei Punkte auf einer Geraden heissen ein *Punktpaar*, 167. zwei Geraden, die durch einen Punkt gehen, ein *Linienpaar*. — Zwei Punktepaaire auf einer Geraden (A, C) , (B, D) heissen *anharmonisch*, wenn zwischen ihren Verbindungslinien die Gleichung besteht:

$$\frac{(BA)}{(BC)} = m \cdot \frac{(DA)}{(DC)};$$

oder:

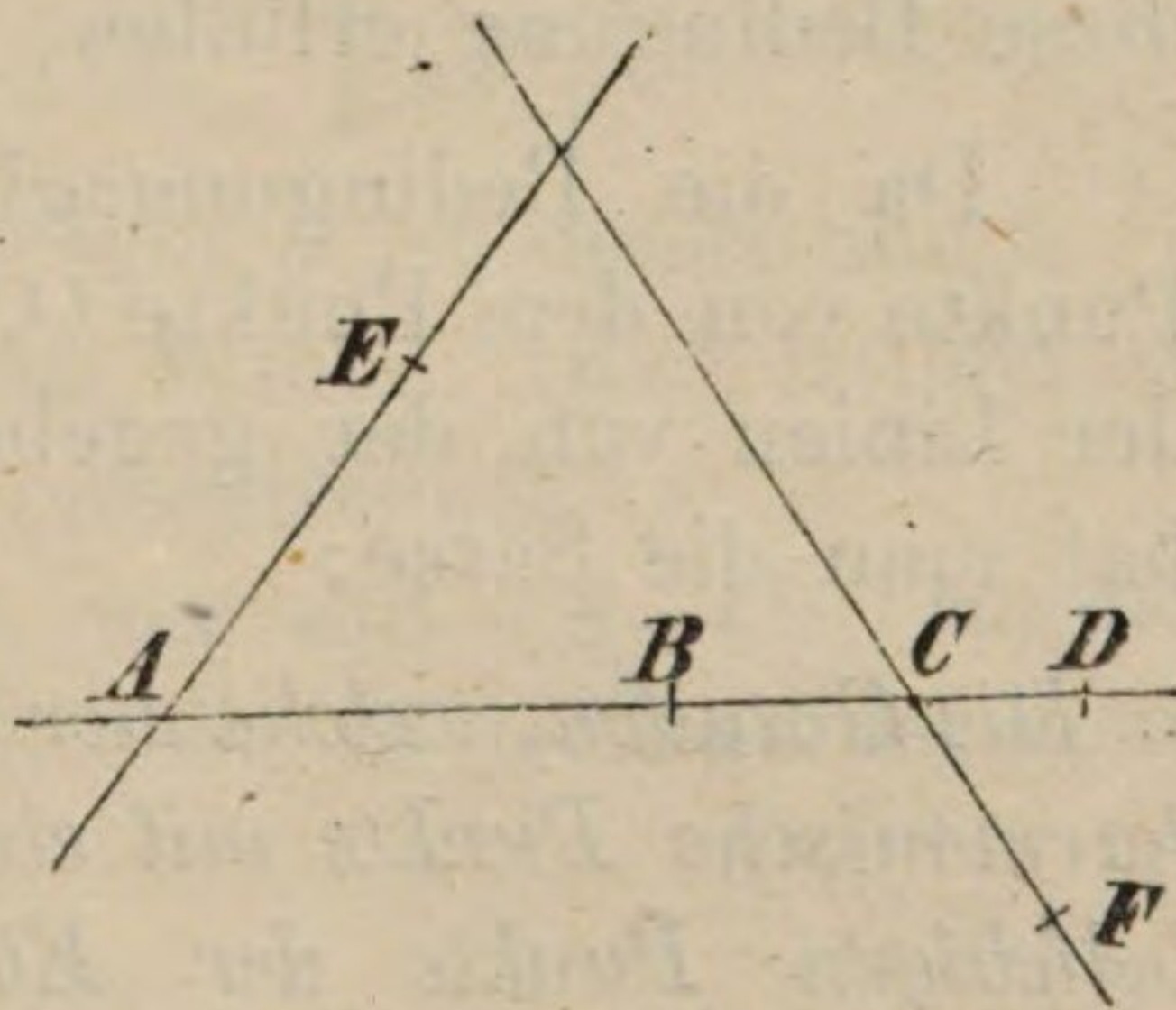
$$\frac{(BA)}{(DA)} = m \cdot \frac{(BC)}{(DC)}.$$

Ist E ein Punkt ausserhalb der Geraden, so ist:

$$\frac{B(AE)}{(BC)} = m \cdot \frac{D(AE)}{(DC)},$$

oder:

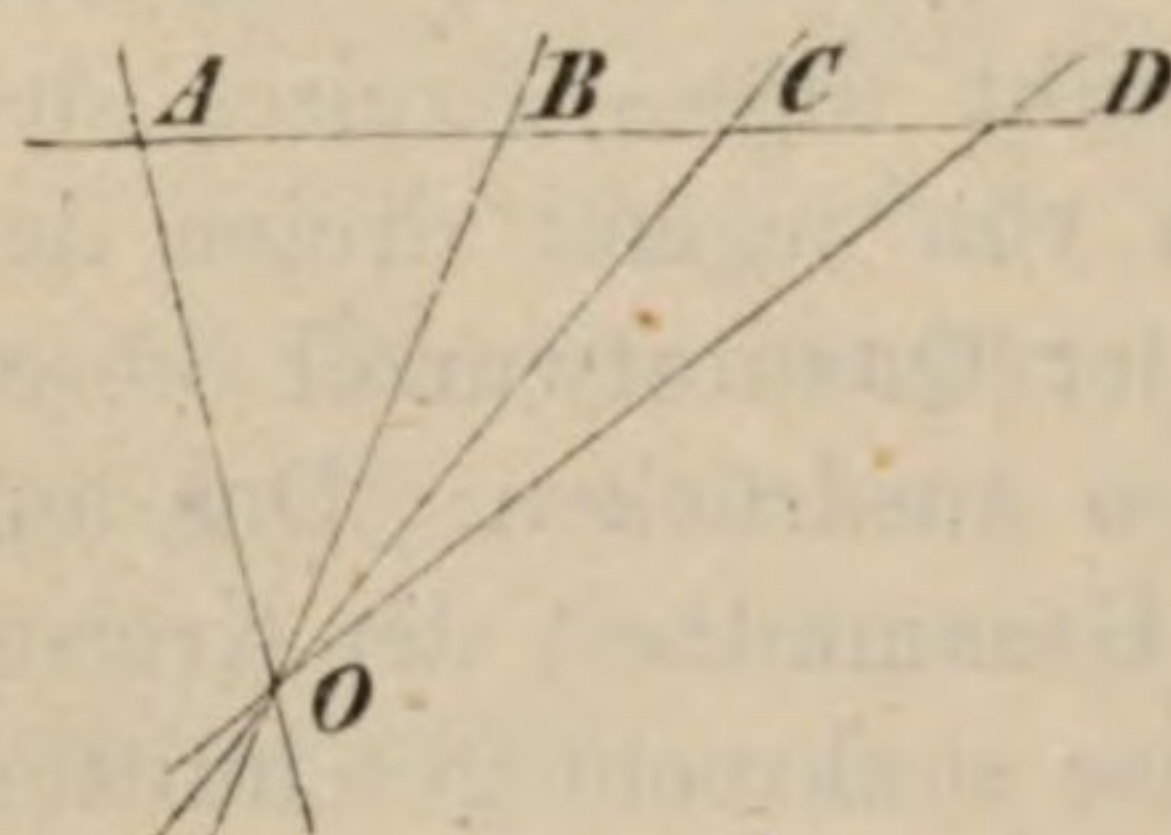
$$\frac{B(AE)}{D(AE)} = m \cdot \frac{(BC)}{(DC)}.$$



*) G. A. II. S. 271.

Diese Gleichungen bestehen also, wenn B, C, D drei Punkte auf einer Geraden sind, und (AE) eine schneidende Gerade.

Ist F ein zweiter Punkt ausserhalb der Geraden, so ist:



$$\frac{B(AE)}{B(CF)} = m \cdot \frac{D(AE)}{D(CF)},$$

oder:

$$\frac{B(AE)}{D(AE)} = m \cdot \frac{B(CF)}{D(CF)}.$$

Diese Gleichungen bestehen also, wenn B und D zwei Punkte, (AE) und (CF) zwei Geraden in derselben Ebene sind.

168. Sei O ein beliebiger Punkt ausserhalb der Geraden, so ist:

$$\frac{(OB)(OA)}{(OB)(OC)} = m \cdot \frac{(OD)(OA)}{(OD)(OC)}.$$

Sind nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die numerischen Werthe der Linien $(OA), (OB), (OC), (OD)$, und a, b, c, d die durch sie bestimmten Geraden, so kann man für die letzte Gleichung schreiben:

$$\frac{\alpha \beta \cdot \sin(ba)}{\beta \gamma \cdot \sin(bc)} = m \cdot \frac{\alpha \delta \cdot \sin(da)}{\gamma \delta \cdot \sin(dc)},$$

oder:

$$\frac{\sin(ba)}{\sin(bc)} = m \frac{\sin(da)}{\sin(dc)}.$$

Zwei durch denselben Punkt gehende Linienpaare, welche diese Bedingung erfüllen, heissen *anharmonisch*.

Da die Bedingungsgleichung für die Anharmonie der Punkte von dem Punkte O , und diejenige für die Anharmonie der Linien von der gegebenen Geraden unabhängig ist, so hat man die Sätze:

Die Geraden, welche vier anharmonische Punkte mit einem beliebigen Punkte der Ebene verbinden, sind anharmonisch in demselben Verhältnisse.

Die Punkte, in denen vier anharmonische Geraden von einer beliebigen Geraden in der Ebene geschnitten werden, sind anharmonisch in demselben Verhältnisse.

Ist $m = -1$, so wird das anharmonische Verhältniss *harmonisch* genannt.

Wenn $\frac{(BA)}{(BC)} = -\frac{(DA)}{(DC)}$, 169.
so ist auch:

$$\frac{(B-A)}{(B-C)} = -\frac{(D-A)}{(D-C)},$$

oder, wenn wir diese Quotienten mit λ bezeichnen:

$$(B-A) = \lambda(B-C); \quad (A-D) = \lambda(D-C),$$

oder:

$$B(1-\lambda) = A - \lambda C; \quad D(1+\lambda) = A + \lambda C,$$

endlich:

$$B = \frac{A - \lambda C}{1 - \lambda}; \quad D = \frac{A + \lambda C}{1 + \lambda}.$$

Betrachten wir nun das Paar (A, C) als gegeben, und (B, D) als gesucht, so entspricht jedem Werthe λ ein Paar (B, D) ; d. h.: Zu einem gegebenen Punktepaare giebt es beliebig viele harmonische. — Nur, wenn $\lambda = 1$, d. h. $D = \frac{A+C}{2}$ ist, wird B unbestimmt, und rückt in unendliche Entfernung, weil dann $(B-A) = (B-C)$ sein soll.

Vertauscht man die Differenzen der Punkte mit den Quotienten der gleich bezeichneten Richtungen, so erhält man aus $(b:a) = (b:c)^2$; $(a:d) = (d:c)^2$ den entsprechenden Satz: Zu einem gegebenen Linienpaare giebt es beliebig viele harmonische. Und wenn $\lambda = 1$ ist, verwandeln sich die Formeln

$$\begin{aligned} b &= \frac{1 - \sqrt[2]{(a:c^2)}}{\sqrt[2]{(a:c^2)}}; & d &= \frac{1 + \sqrt[2]{(a:c^2)}}{\sqrt[2]{(a:c^2)}} \\ \text{in} & & & \\ b &= \frac{0}{\sqrt[2]{(a:c)}}; & d &= \frac{2}{\sqrt[2]{a \cdot c}}, \end{aligned}$$

d. h.: d halbt den Winkel (ac) und b ist unbestimmt.

Wenn also die Gerade d den Winkel (ac) halbt, so ist die vierte harmonische Linie unbestimmt.

Soll das Paar (B, D) nicht nur mit (A, C) , sondern 170. auch noch mit (E, F) harmonisch sein, so tritt zu der ersten Gleichung die zweite hinzu:

$$\frac{(BE)}{(BF)} = -\frac{(DE)}{(DF)} = \mu.$$

Beide Gleichungen geben zusammen folgende Werthe für B und D :

$$B = \frac{A - \lambda C}{1 - \lambda} = \frac{E - \mu F}{1 - \mu}; \quad D = \frac{A + \lambda C}{1 + \lambda} = \frac{E + \mu F}{1 + \mu}.$$

Durch Elimination von B erhält man:

$$\lambda \mu (C - F) + \lambda (E - C) + \mu (F - A) + (A - E) = 0,$$

und durch Aenderung der Zeichen von λ und μ :

$$\lambda \mu (C - F) - \lambda (E - C) - \mu (F - A) + (A - E) = 0.$$

Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen erhält man:

$$\lambda \mu (C - F) = (E - A); \quad \lambda (E - C) = \mu (A - F),$$

oder durch Multiplication:

$$\lambda^2 (C - F) (E - C) = (E - A) (A - F);$$

endlich:

$$\lambda^2 = \frac{(E - A)}{(C - F)} \cdot \frac{(A - F)}{(E - C)}$$

und indem wir A mit E , F mit C vertauschen:

$$\mu^2 = \frac{(E - A)}{(C - F)} \cdot \frac{(E - C)}{(A - F)}.$$

Da nun λ und μ vollkommen bestimmt sind, so giebt es zu zwei gegebenen Punktpaaren nur ein harmonisches. Drückt man λ^2 noch als Product der beiden mit λ gleichen Quotienten aus, so findet sich, dass zwischen den drei Punktpaaren (B, D) , (A, C) , (E, F) die Gleichung besteht:

$$\frac{(B - A)}{(B - C)} \cdot \frac{(A - D)}{(D - C)} = \frac{(E - A)}{(C - F)} \cdot \frac{(A - F)}{(E - C)},$$

oder:

$$\frac{(B - A)}{(B - C)} \cdot \frac{(D - A)}{(D - C)} + \frac{(E - A)}{(F - C)} \cdot \frac{(F - A)}{(E - C)} = 0.$$

Eine andere Beziehung erhält man aus dieser durch Vertauschung von A und C mit resp. E und F .

Vertauscht man die Differenzen mit den Sinus der Winkel, die von den entsprechend benannten Geraden gebildet werden, so erhält man ähnliche Formeln und Sätze für die harmonischen Linien.

171. Soll das Paar (B, D) ausser mit (A, C) und (E, F) noch mit (G, H) harmonisch sein, so tritt zu den beiden vorigen Gleichungen noch die dritte hinzu:

$$\frac{(B G)}{(B H)} = - \frac{(D G)}{(D H)} = \nu.$$

Alle drei Gleichungen geben folgende Werthe für B und D :

$$B = \frac{A - \lambda C}{1 - \lambda} = \frac{E - \mu F}{1 - \mu} = \frac{G - \nu H}{1 - \nu},$$

$$D = \frac{A + \lambda C}{1 + \lambda} = \frac{E + \mu F}{1 + \mu} = \frac{G + \nu H}{1 + \nu}.$$

Nach Wegschaffung von B und D bleiben vier Gleichungen mit drei Unbekannten. Diese liefern die Werthe:

$$\lambda^2 = \frac{(E - A)}{(C - F)} \cdot \frac{(A - F)}{(E - C)} = \frac{(G - A)}{(C - H)} \cdot \frac{(A - H)}{(G - C)},$$

$$\mu^2 = \frac{(E - A)}{(C - F)} \cdot \frac{(E - C)}{(A - F)} = \frac{(G - E)}{(F - H)} \cdot \frac{(E - H)}{(G - F)},$$

$$\nu^2 = \frac{(G - A)}{(C - H)} \cdot \frac{(G - C)}{(A - H)} = \frac{(G - E)}{(F - H)} \cdot \frac{(G - F)}{(E - H)}.$$

Durch Elimination von λ^2 , μ^2 , ν^2 erhält man drei gleichbedeutende Bedingungsgleichungen, welche von den drei Paaren (A, C) , (E, F) , (G, H) erfüllt sein müssen, wenn ein zu allen harmonisches Paar (B, D) existiren soll. — Drei Punktpaare, welche ein gemeinsames harmonisches Paar haben, heissen *involutorisch* (bilden eine *Involution*).

Unter Anwendung einer einfachen Abkürzung kann man die letzten Formeln auch schreiben:

$$\lambda^2 = \beta \cdot \beta_1 = \gamma : \gamma_1$$

$$\mu^2 = \alpha \cdot \alpha_1 = \beta : \beta_1$$

$$\nu^2 = \gamma \cdot \gamma_1 = \alpha : \alpha_1;$$

daher ist:

$$(\beta \alpha \gamma) \cdot (\beta_1 \alpha_1 \gamma_1) = (\gamma \beta \alpha) : (\gamma_1 \beta_1 \alpha_1),$$

oder:

$$(\alpha_1 \gamma_1 \beta_1)^2 = 1; \quad \alpha_1 \gamma_1 \beta_1 = 1,$$

oder:

$$\frac{(E - H)}{(G - F)} \cdot \frac{(G - C)}{(A - H)} \cdot \frac{(A - F)}{(E - C)} = 1;$$

oder:

$$\frac{(E - H)}{(E - C)} \cdot \frac{(G - C)}{(G - F)} \cdot \frac{(A - F)}{(A - H)} = 1.$$

Dies ist eine zweite Form der Bedingungsgleichung für die Involution.

Durch dasselbe Verfahren, wie in der vorigen Nr. erhält man hier die Formeln und Sätze für die Involution von Linien.

2. Centralität und Polarität.

Sind (P, Q) und (S_1, S_2) zwei harmonische Punktpaare 172. auf einer Geraden, so ist:

$$\frac{Q - S_1}{P - S_1} + \frac{Q - S_2}{P - S_2} = 0,$$

oder:
$$\frac{Q - S_1}{P - S_1} = - \frac{Q - S_2}{P - S_2},$$

oder:
$$\frac{Q - S_1}{P - S_1} - 1 = 1 - \frac{Q - S_2}{P - S_2} - 2;$$

d. h.:
$$\frac{Q - P}{P - S_1} = \frac{P - Q}{P - S_2} - 2,$$

oder:
$$\frac{1}{P - S_1} + \frac{1}{P - S_2} = \frac{2}{P - Q}.$$

Dieser Zusammenhang zwischen den drei von P auslaufenden Strecken wird dadurch bezeichnet, dass man sagt, Q sei die *harmonische Mitte* zwischen S_1 und S_2 , in Bezug auf P .

Setzt man

$$P - S_1 = s_1; \quad P - S_2 = s_2; \quad P - Q = q,$$

so ist:
$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{q},$$

oder:
$$s_1 + s_2 = \frac{2 s_1 s_2}{q},$$

oder:
$$q = \frac{2 s_1 s_2}{s_1 + s_2}.$$

Die Strecke q heisst *das harmonische Mittel* zwischen den Strecken s_1 und s_2 . Sind s_1, s_2, q in Zahlen ausgedrückt, und s_1', s_2', q' die umgekehrten Werthe dieser Zahlen, so ist:

$$s_1' + s_2' = 2 q';$$

d. h.: *Der umgekehrte Werth des arithmetischen Mittels zwischen zwei Grössen ist das harmonische Mittel zwischen den umgekehrten Werthen dieser Grössen.*

173. Betrachten wir s_1 und s_2 als Wurzeln einer Gleichung 2^{ten} Grades:

$$s^2 + \beta s + \gamma = 0,$$

dann ist:

$$s - s_1 = 0; \quad s - s_2 = 0;$$

$$(s - s_1)(s - s_2) = 0;$$

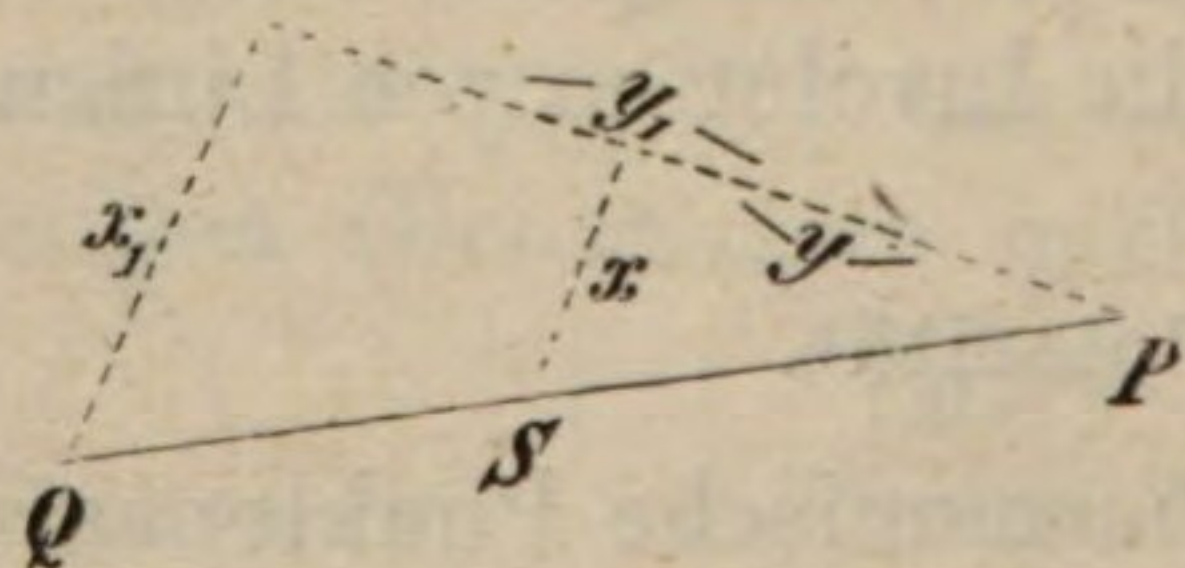
$$s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2 = 0;$$

d. h.:

$$\beta = -(s_1 + s_2); \quad \gamma = s_1 s_2,$$

also:

$$q = -2 \cdot \frac{\gamma}{\beta}.$$



Setzen wir nun:

$$q = x_1 + y_1; \quad x = nx_1$$

$$s = x + y; \quad y = ny_1,$$

woraus folgt:

$$s = n(x_1 + y_1) = nq;$$

oder:

$$(x : x_1) = (y : y_1) = (s : q);$$

so sind x und y für S , x_1 und y_1 für Q die Coordinaten in Bezug auf ein System von zwei in P sich schneidenden Geraden.

Besteht nun zwischen x und y eine Gleichung 2^{ten} Grades:

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0,$$

so drückt dieselbe aus, dass der Punkt S (d. h. die Punkte s_1 und s_2) auf einem Kegelschnitte sich bewegt, während die Gerade der vier harmonischen Punkte sich um P dreht. — Setzen wir in dieser Gleichung für x und y die Werthe $\frac{x_1}{q} \cdot s$ und $\frac{y_1}{q} \cdot s$, so verwandelt sie sich in die Gleichung

$$s^2 + \beta s + \gamma = 0,$$

und es ist:

$$(\gamma : \beta) = e : \frac{cy_1 + dx_1}{q} = \frac{e \cdot q}{cy_1 + dx_1}.$$

Da aber:

$$q = -2 \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{oder} \quad \frac{\gamma}{\beta} = -\frac{q}{2}$$

war, so ist:

$$-\frac{1}{2} = \frac{e}{cy_1 + dx_1},$$

oder:

$$cy_1 + dx_1 + 2e = 0.$$

Es besteht also zwischen den Coordinaten des Punktes Q eine Gleichung 1^{ten} Grades; d. h. dieser Punkt bewegt sich auf einer Geraden; oder:

Wenn von einem festen Punkte P durch einen festen Kegelschnitt eine bewegliche Gerade gezogen wird, so ist der geometrische Ort der harmonischen Mitte zwischen den Schnittpunkten der Geraden S_1 und S_2 in Bezug auf P eine Gerade.

Ist $S = S_1$, d. h. geht die Secante in eine Tangente über, so ist $\frac{Q - S_1}{P - S_1} = 0$, d. h.: $Q - S_1 = 0$; folglich geht die Gerade der Punkte Q durch den Berührungspunkt der Tangente. — Da die Gleichung der Curve, wenn man x_1 und y_1 für x und y setzt, in die beiden Gleichungen zerfällt:

$$cy_1 + dx_1 + 2e = 0; \quad y_1^2 + ax_1y_1 + bx_1^2 = e,$$

so hat die Gerade der Punkte Q zwei Punkte mit der Curve gemeinsam, nämlich die Berührungspunkte der von P aus an dieselbe gezogenen Tangenten.

Der Punkt P heisst *Pol*, und der geometrische Ort der harmonischen Mitten Q die *Centrale*.

Zieht man also von einem beliebigen Punkte P aus zwei Tangenten an einen Kegelschnitt, so ist die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte die zum Pole P gehörige Centrale.

174. Multiplicirt man die Gleichung $\frac{QS_1}{PS_1} + \frac{QS_2}{PS_2} = 0$ mit $\frac{PS_1}{QS_1} \cdot \frac{PS_2}{QS_2}$, so folgt:

$$\frac{PS_1}{QS_1} + \frac{PS_2}{QS_2} = 0.$$

Durch diese Gleichung ist der geometrische Ort des Poles P bestimmt, wenn die Gerade der vier harmonischen Punkte sich um die feste harmonische Mitte Q , statt um den Pol P dreht.

Der geometrische Ort des zu einer festen harmonischen Mitte gehörigen beweglichen Poles heisst *Polare*. Es entspricht also die Centrale dem Pol, die Polare der harmonischen Mitte.

Vertauscht man in der letzten Gleichung die Buchstaben P und Q , so erhält man wieder die ursprüngliche Gleichung; d. h.: *in Bezug auf einen Kegelschnitt stehen ein Punkt und eine Gerade gleichzeitig im Verhältniss von Pol und Centrale, und von harmonischer Mitte und Polare.* — Man bezeichnet daher die beiden Gebilde gewöhnlich nur mit den Namen Pol und Polare.

Aus diesen Definitionen folgen unmittelbar die Sätze: *Dreht sich eine Polare um einen ihrer Punkte, so beschreibt der zugeordnete Pol eine Gerade, und umgekehrt.* —

Insbesondere wird für $S = S_1$ $P = S_1$; d. h.: *Dreht sich die Polare um einen ihrer Durchschnittspunkte mit der Curve bis in die Richtung der Tangente, so rückt der zugeordnete Pol auf der Tangente bis zum Berührungspunkte.* Oder: *Liegt der Pol auf der Curve, so ist die zugeordnete Polare die Tangente in diesem Punkte.*

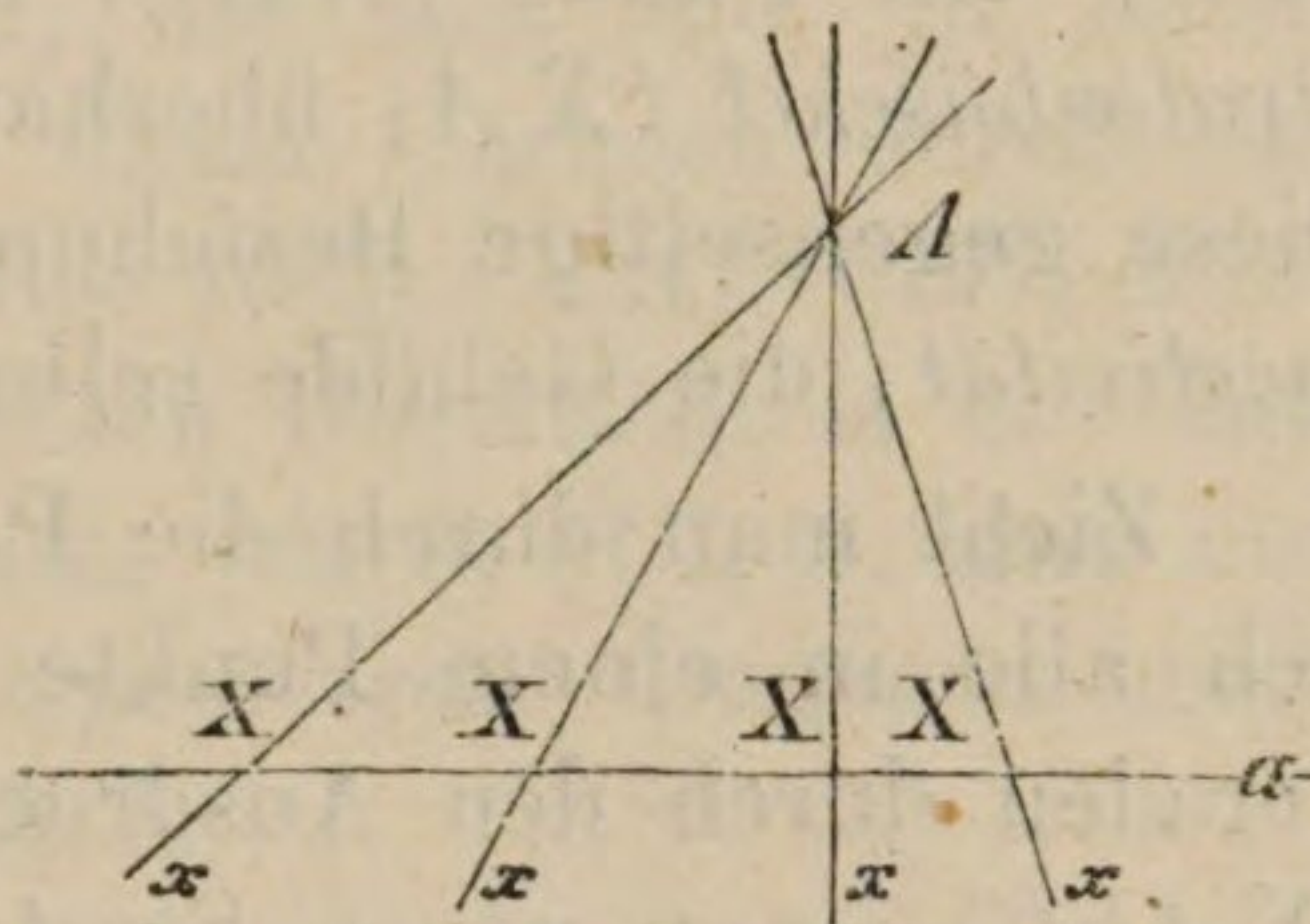
Die Verallgemeinerung dieser Theorie s. in den Grassmann'schen Schriften.*)

6. Vereine mit unbeschränkter Gliederzahl. — Punktreihen und Strahlenbüschel.

1. Ein Verein.

Ein Verein von Punkten, die auf derselben Geraden¹⁷⁵ liegen, heisst eine *Punktreihe*, von Geraden, die durch denselben Punkt (*Mittelpunkt*) gehen, ein *Strahlenbüschel*.

Sei a eine Gerade, und A ein Punkt ausserhalb derselben. Sei ferner x eine beliebige durch A gezogene Gerade, welche a in X trifft. Dann ist jede dieser Geraden x durch das planimetrische Product (AX) bestimmt, und jeder Punkt X durch das planimetrische Product (ax) . Man hat also:



$(XA) \equiv x$; $(xa) \equiv X$; oder: $(AX) \equiv x$; $(ax) \equiv X$,
woraus noch folgt:

oder: $(xa \cdot A) \equiv x$; $(XA \cdot a) \equiv X$,
 $(ax \cdot A) \equiv x$; $(AX \cdot a) \equiv X$.

Setzen wir noch:

$(aA \cdot x) \equiv x$; $(Aa \cdot X) \equiv X$,
so ist:
 $(ax \cdot A) \equiv (aA \cdot x)$; $(AX \cdot a) \equiv (Aa \cdot X)$;

d. h.: In jedem planimetrischen Producte kann man zwei auf einander folgende Factoren vertauschen, wenn sie von einander abhängig sind.

Ein Verein von beliebigen Punkten auf einer Geraden a ist also durch (ax) , ein Verein von beliebigen Geraden, die durch einen Punkt A gehen, durch (AX) dargestellt, vorausgesetzt einstweilen, dass im ersten Falle die veränderliche Gerade x um einen Punkt A sich dreht, im zweiten Falle der veränderliche Punkt X auf einer Geraden a fortschreitet.

*) Crelle's Journal. Bd. 24. S. 262. 372. Bd. 25.

Die Betrachtung der Figur ergibt noch, dass X die Projection des festen Punktes A auf das Grundsystem a nach dem Leitsysteme x ist. Diese Projection kann man *progressive* nennen. Dann ist x die *regressive* Projection der festen Geraden a auf das Grundsystem A nach dem Leitsysteme X .

2. Mehrere Vereine.

176. Wenn (XA) oder (A) ein beliebiger Strahlenbüschel ist, und b eine ihn schneidende Gerade, so entspricht jedem Stral (XA) ein Punkt (XAb) auf der Geraden b , mithin dem *Strahlenbüschel* (XA) überhaupt die *Gerade* (XAb) oder b . — Diese gegenseitige Beziehung der beiden Gebilde heisst *Perspectivität*, die Gebilde selbst *perspectivisch*.

Zieht man durch die Punkte (XAb) gerade Linien, die sich alle in einem Punkte C schneiden, so ist jede dieser Geraden durch den Ausdruck $(XAbC)$ bestimmt, also stellt $(XAbC)$ einen neuen Strahlenbüschel (C) dar, dessen Durchschnitt mit dem ersten die Gerade b ist. Nun ist (C) per-

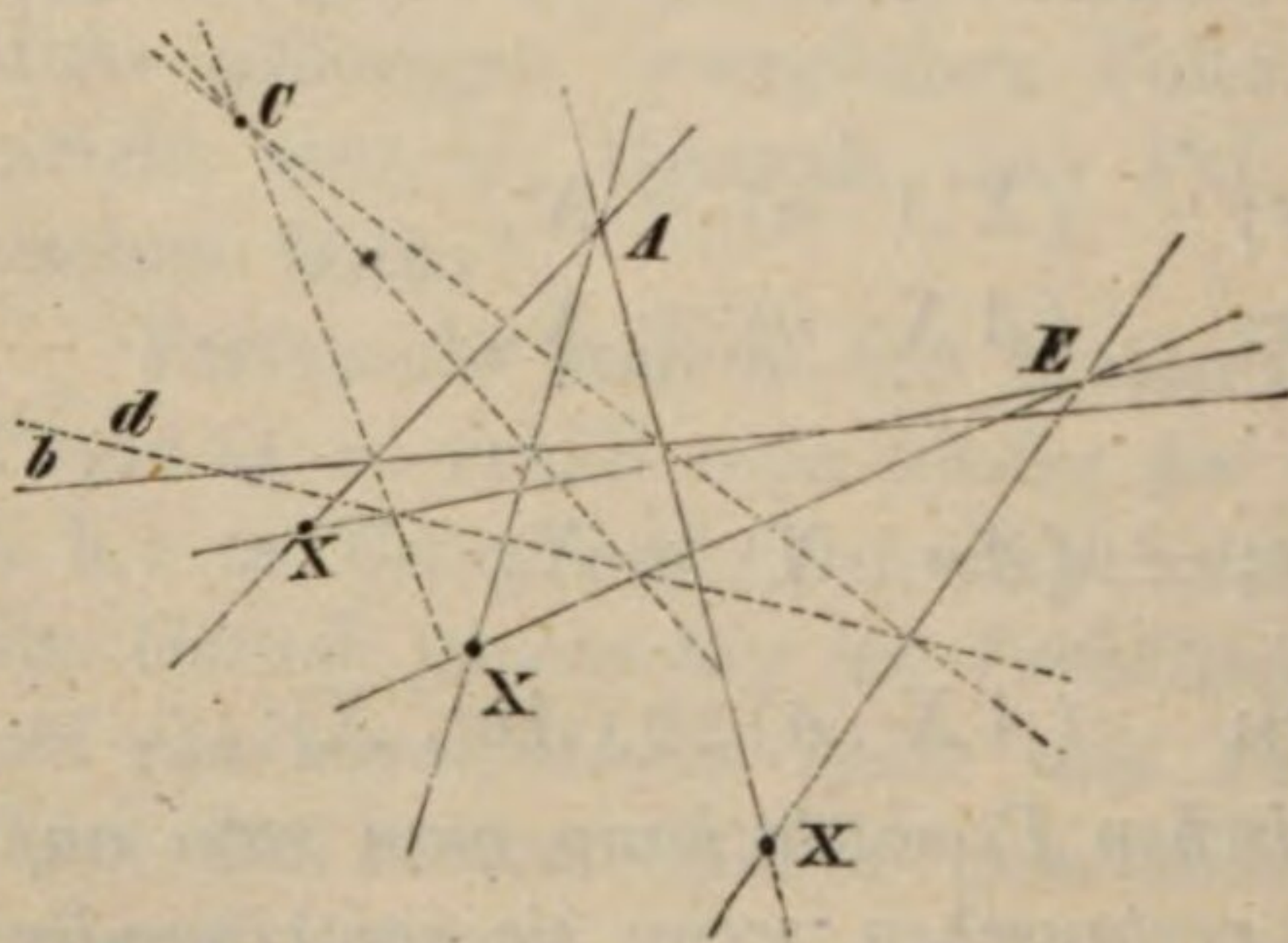
spectivisch mit b und b mit (A) ; daher nennt man auch (C) *perspectivisch* mit (A) . —

Bezeichnet man nun mit X die Durchschnittspunkte der beiden Strahlenbüschel (A) und (C) , so liegt X auf der Geraden $(XAbC)$; d. h. man hat:

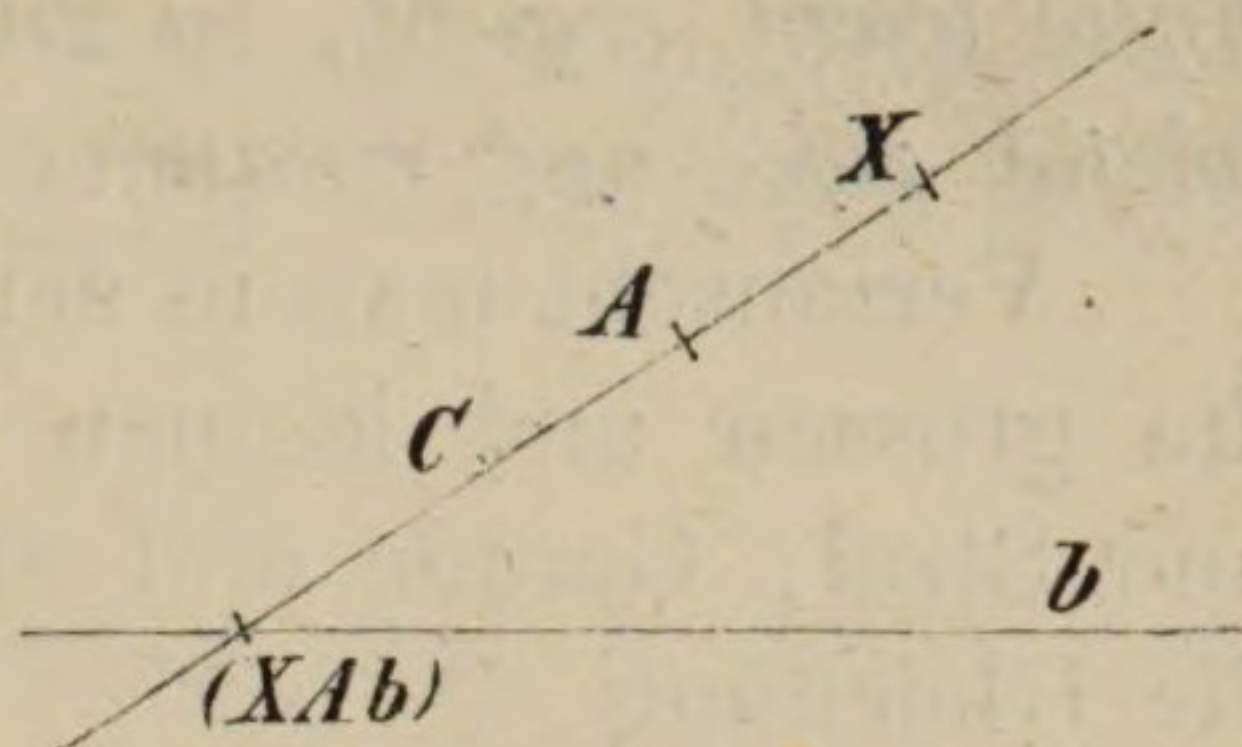
$$(XAbCX) = 0$$

als planimetrische Gleichung für den Ort des Punktes X . — Diese Gleichung sagt nun aus, dass die Punkte (XAb) , C , X in gerader Linie liegen. Dies ist nur möglich, wenn $(XAb) \equiv X$, oder $(XAC) = 0$ ist. Die erste dieser Gleichungen, die man auch $(Xb) = 0$ schreiben kann, sagt, dass X auf der Geraden b , die zweite, dass X auf der Geraden (AC) sich bewegt. Die Gleichung $(XAbCX) = 0$ zerfällt also in die Gleichungen zweier Geraden.

Wenn ferner d eine neue Gerade ist, welche den Stralen-



büschel (C) schneidet, so entspricht jedem Stral $(XAbC)$ ein Punkt $(XAbCd)$ auf der Geraden d , mithin dem *Strahlenbüschel* (C) überhaupt die Gerade $(XAbCd)$ oder d . — Ebenso wie die Gebilde (A) , b , (C) , so sind nun auch b , (C) , d unter einander *perspectivisch*. — Dagegen heisst die gegenseitige Beziehung von (A) und d *Projectivität*, die Gebilde selbst *projectivisch*.



Zieht man endlich durch die Punkte $(XAbCd)$ gerade Linien, die sich alle in einem Punkte E schneiden, so ist jede dieser Geraden durch den Ausdruck $(XAbCdE)$ bestimmt, also stellt $(XAbCdE)$ einen dritten Strahlenbüschel (E) dar, dessen Durchschnitt mit dem zweiten die Gerade d ist. — Ebenso, wie b , (C) , d , sind nun auch (C) , d , (E) unter einander *perspectivisch*. Dagegen heisst (E) *projectivisch* mit (A) , wie mit b .

Diese Beziehungen zusammenfassend, kann man sagen: *In einem planimetrischen Producte, welches abwechselnd Strahlenbüschel und Geraden als Factoren enthält, sind zwei Factoren projectivisch, wenn sie durch mehr als einen Factor getrennt sind; sonst perspectivisch.*

Bezeichnet man nun mit X die Durchschnittspunkte der beiden Strahlenbüschel (A) und (E) , so liegt X auf der Geraden $(XAbCdE)$, d. h. man hat:

$$(XAbCdEX) = 0,$$

d. h.: *der Durchschnitt zweier projectivischen Strahlenbündel ist ein Kegelschnitt.*

Fallen unter den festen Factoren des Productes zwei benachbarte, z. B. C und d , zusammen, so kann man das Product auch schreiben:

$$(XAbd . CEX),$$

und die planimetrische Gleichung zerfällt in folgende beiden:

$$(XAbd) = 0; \quad (CEX) = 0.$$

Die erste drückt aus, dass die Geraden (XA) , b , d durch einen Punkt gehen, und stellt daher die Verbindungslinie des Punktes A mit dem Durchschnittspunkte der Geraden b und d dar. Die zweite drückt aus, dass die Punkte CEX in

gerader Linie liegen, und stellt daher die Verbindungslinie der Punkte C und E dar. Somit zerfällt der Kegelschnitt (Curve 2^{ter} Ordnung), wie auch die Betrachtung der übrigen Fälle leicht ergibt, in zwei Geraden (Curven 1^{ter} Ordnung), sobald zwei auf einander folgende Elemente zusammenfallen.

177. Vertauscht man in der Darstellung der vorigen Nr. überall die grossen und kleinen Buchstaben, die Ausdrücke Punkt und Stral, Gerade und Strahlenbüschel, so erhält man zuerst die Gleichung

$$(x a B c x) = 0$$

als planimetrische Gleichung für den Ort der Geraden x , und es ergibt sich, dass diese Gleichung zwei Punkte darstellt. Zweitens erhält man die Gleichung

$$(x a B c D e x) = 0;$$

diese drückt aus, dass die Geraden x einen Kegelschnitt umhüllen, d. h. dass sie in ihrer Gesammtheit die ganze Ebene erfüllen, mit Ausnahme derjenigen Theile, denen der Kegelschnitt seine concave Seite zuwendet.

Fallen zwei auf einander folgende Elemente zusammen, so zerfällt der Kegelschnitt (Curve 2^{ter} Klasse) in zwei Punkte (Curven 1^{ter} Klasse).

178. *Erweiterung.* Sei die Gerade, welche in Nr. 176 die Punkte $(X A b C d)$ und X verbindet, durch eine feste Gerade b_1 geschnitten im Punkte G , sodass

$$(X A b C d X b_1) \equiv G$$

ist. Daraus folgt:

$$(X A b C d X G) = 0;$$

d. h.: Alle Punkte X , welche demselben Punkte G auf der Geraden b_1 entsprechen, liegen auf einem Kegelschnitte. — Wir können daher sagen, dem Punkte G entspreche der Kegelschnitt $(X A b C d X G)$; ebenso wie oben dem Punkte X der Stral x .

Die Gesammtheit aller Kegelschnitte, welche den Punkten der Geraden b_1 entspricht, heisst ein *Curvenbüschel* 2^{ter} Ordnung; die Gerade b_1 heisst *perspectivisch* mit dem Curvenbüschel, und es bleibt noch zu untersuchen, ob es für alle Curven des Büschels gemeinsame Durchschnittspunkte giebt, ebenso wie es für einen Strahlenbüschel (Curvenbüschel 1^{ter} Ordnung) einen solchen Durchschnittspunkt (Mittelpunkt) gab.

Betrachten wir jetzt G als Durchschnittspunkt einer variablen Geraden g mit b_1 ; dann ist die Gleichung des Kegelschnittes:

$$(XAbCdXb_1g) = 0,$$

und jedem Punkte G , d. h. jeder Geraden g entspricht ein neuer Kegelschnitt. — Giebt es nun auf einem dieser Kegelschnitte Punkte, für welche schon

$$(XAbCdXb_1) = 0$$

ist, so müssen diese Punkte gleichzeitig allen Kegelschnitten angehören, weil die Gleichungen derselben sich nur durch den Werth von g unterscheiden, welcher für diese Punkte unwesentlich ist.

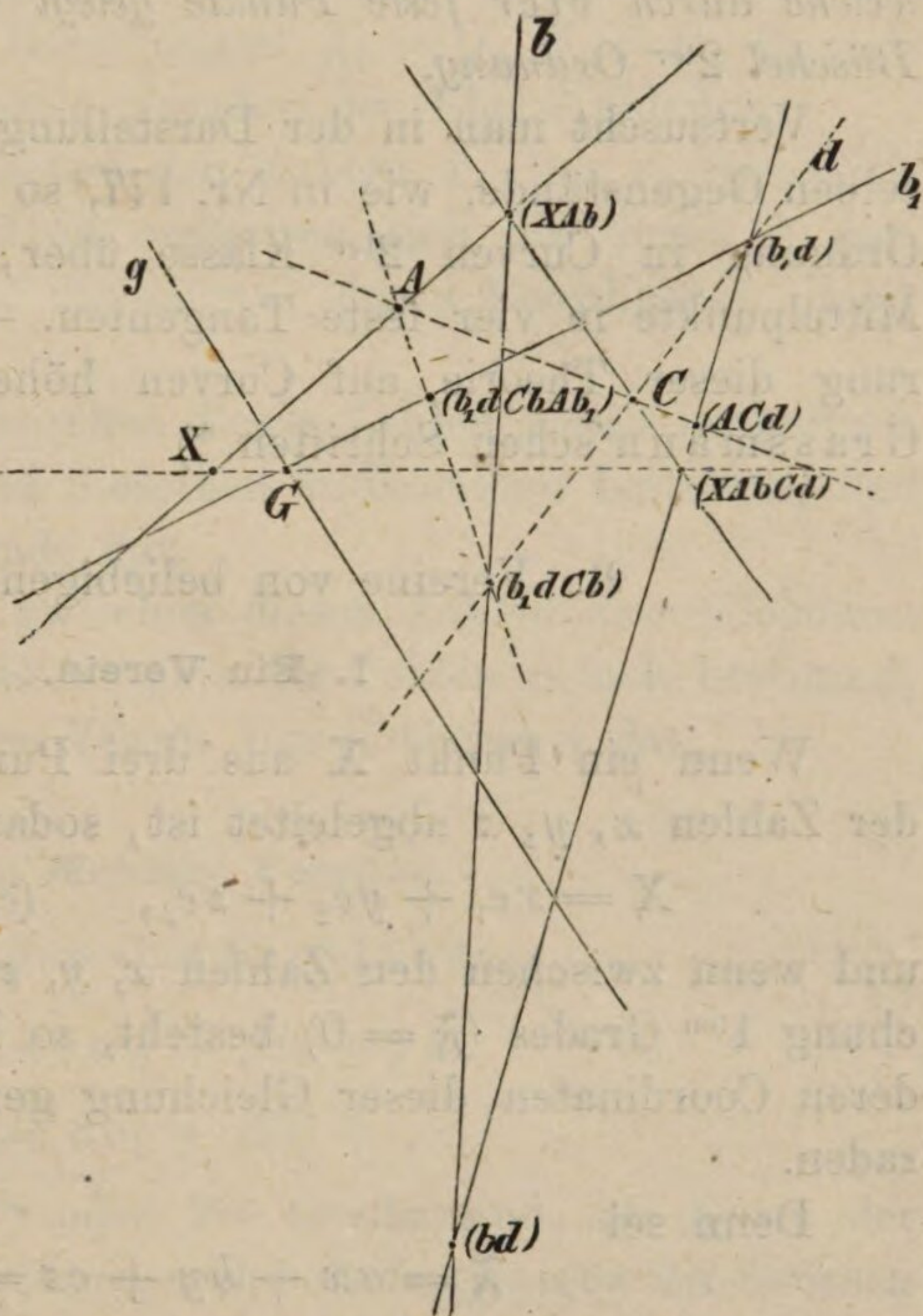
Die Gleichung $(XAbCdXb_1) = 0$ wird nun durch folgende Specialwerthe von X befriedigt:

1) $X \equiv A$, oder $(XA) = 0$. — Dagegen würde aus

$$(XAb) = 0$$

folgen, dass A und b zusammenfallen, aus $(XAbC) = 0$, dass b und C , aus $(XAbCd) = 0$, dass C und d zusammenfallen. Die nächste zulässige Annahme ist also:

2) $(XAbCd) \equiv X$, oder $(XAbCdX) = 0$, d. h. X ist der Schnittpunkt der Geraden $(XAbC)$ und d . Da nun X auf $(XAbC)$ liegt, so ist auch $(XAbCX) = 0$. Diese Gleichung stellt aber die Geraden b und (AC) vor; folglich genügen die Durchschnittspunkte von d mit b und (AC) unserer Gleichung; und die Werthe von X sind: $X \equiv (bd)$; $X \equiv (ACd)$.



3) $(XAbCdX) \equiv b_1$; oder $(XAbCdXb_1) = 0$; d. h.: die Punkte $(XAbCd)$ und X liegen auf der Geraden b_1 . Daher ist auch $(XAbCdb_1) = 0$ oder $(b_1dCbAX) = 0$; d. h.: X liegt auf der Geraden (b_1dCbA) . Da X aber auch auf b_1 liegen soll, so ist es der Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden; d. h. $X \equiv (b_1dCbAb_1)$.

Hiernach sind die vier Punkte $A, (bd), (ACd), (b_1dCbAb_1)$ Mittelpunkte des Kegelschnittbüschels. — Man kann also sagen: *Alle Geraden, welche durch einen festen Punkt gelegt werden können, bilden einen Büschel 1^{ter} Ordnung, alle Kegelschnitte, welche durch vier feste Punkte gelegt werden können, einen Büschel 2^{ter} Ordnung.*

179. Vertauscht man in der Darstellung der vorigen Nr. dieselben Gegenstände, wie in Nr. 177, so gehen die Curven 2^{ter} Ordnung in Curven 2^{ter} Klasse über, und die vier festen Mittelpunkte in vier feste Tangenten. — Die Verallgemeinerung dieser Theorie auf Curven höherer Grade s. in den Grassmann'schen Schriften.*)

B. Vereine von beliebigen Grössen.

1. Ein Verein.

180. Wenn ein Punkt X aus drei Punkten $e_1 e_2 e_3$ mittelst der Zahlen x, y, z abgeleitet ist, sodass

$$X = xe_1 + ye_2 + ze_3, \quad (e_1 e_2 e_3) = 1,$$

und wenn zwischen den Zahlen x, y, z eine homogene Gleichung 1^{ten} Grades ($\mathfrak{F} = 0$) besteht, so liegen alle Punkte X , deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, auf einer Geraden.

Denn sei

$$\mathfrak{F} = ax + by + cz = 0,$$

so erhält man durch Multiplication der ersten Gleichung mit einer unbestimmten Grösse λ :

$$\lambda X = x(\lambda e_1) + y(\lambda e_2) + z(\lambda e_3);$$

folglich:

$$(\lambda X) = 0; \quad (\lambda e_1) = a; \quad (\lambda e_2) = b; \quad (\lambda e_3) = c.$$

Da nun a, b, c Zahlen sind, so muss λ ein Linientheil

*) Crelle's Journal. Bd. 42. S. 193.

sein; dann aber sagt die Gleichung $(\lambda X) = 0$, dass X auf einer Geraden liegt.

Seien nun drei solcher Gleichungen gegeben:

$$\mathfrak{F}_1 = 0; \quad \mathfrak{F}_2 = 0; \quad \mathfrak{F}_3 = 0.$$

Dann lässt sich $\mathfrak{F}$ aus den Functionen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ mittelst der Zahlen x_1, x_2, x_3 ableiten, so dass

$$\mathfrak{F} = x_1 \mathfrak{F}_1 + x_2 \mathfrak{F}_2 + x_3 \mathfrak{F}_3, \quad (x_1 + x_2 + x_3 = 1).$$

Jedem Werthsystem der Zahlen x_1, x_2, x_3 entspricht nun ein Werth von $\mathfrak{F}$, d. h. eine besondere Gleichung $\mathfrak{F} = 0$, und eine durch diese Gleichung bestimmte Gerade. — Aus den drei Geraden, deren Gleichungen $\mathfrak{F}_1 = 0, \mathfrak{F}_2 = 0, \mathfrak{F}_3 = 0$ sind, lassen sich also alle Geraden der Ebene ableiten.

Besteht aber zwischen den Zahlen x_1, x_2, x_3 eine Gleichung 1^{ten} Grades; dann reduciren sich die durch $\mathfrak{F}$ dargestellten Geraden auf diejenigen, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen.

Bestehen ferner zwischen diesen Zahlen zwei Gleichungen vom 1^{ten} Grade, so sind dieselben vollkommen bestimmt, und $\mathfrak{F} = 0$ stellt eine Gerade dar.

Bestehen endlich zwischen diesen Zahlen zwei Gleichungen vom n^{ten} Grade, so ist jede der Zahlen n -fach bestimmt, und $\mathfrak{F} = 0$ stellt einen Verein von n Geraden dar.

2. Mehrere Vereine.

a) Allgemeine Beziehungen.

Wenn $p = \alpha a + \beta b + \gamma c$ 181.
und $p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1$

zwei Grössen vom 1^{ten} oder 2^{ten} Grade sind, so heisst der Verein der Grössen abc *verwandt* mit demjenigen der Grössen $a_1 b_1 c_1$, und zwar *direct* verwandt, wenn p und p_1 Grössen von gleichem Grade sind, *reciprok* verwandt im anderen Falle.*) — Zu jeder aus abc abgeleiteten Grösse p giebt es nun eine entsprechende aus $a_1 b_1 c_1$ abgeleitete; und es heisst allgemein der Verein aller Grössen p verwandt mit dem Vereine aller entsprechenden Grössen p_1 .

*) Vgl. G. A. I. § 157. 159. II. 401. 402.

182. Seien nun $p q r s$ vier Grössen des einen, und $p_1 q_1 r_1 s_1$ die entsprechenden Grössen eines verwandten Vereines. Dann besteht zwischen $p q r s$ jedenfalls die Zahlbeziehung:

$$\lambda p + \mu q + \nu r + \varrho s = 0,$$

oder:

$$\begin{aligned} & (\lambda \alpha + \mu \alpha_1 + \nu \alpha_2 + \varrho \alpha_3) a \\ & + (\lambda \beta + \mu \beta_1 + \nu \beta_2 + \varrho \beta_3) b \\ & + (\lambda \gamma + \mu \gamma_1 + \nu \gamma_2 + \varrho \gamma_3) c = 0. \end{aligned}$$

Da nun aber zwischen a, b, c keine Zahlbeziehung besteht, so sind die Coefficienten dieser Grössen einzeln Null. — Bildet man nun den Ausdruck

$$\lambda p_1 + \mu q_1 + \nu r_1 + \varrho s_1$$

und drückt wie oben $p_1 q_1 r_1 s_1$ durch $a_1 b_1 c_1$ aus, so sind die Coefficienten von $a_1 b_1 c_1$ dieselben, wie die von $a b c$, also gleich Null; folglich ist auch

$$\lambda p_1 + \mu q_1 + \nu r_1 + \varrho s_1 = 0;$$

d. h.: *jede Zahlbeziehung, welche zwischen Grössen eines Vereines besteht, existirt auch zwischen den entsprechenden Grössen jedes verwandten Vereines.*

183. Seien

$$a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3;$$

$$b_4 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3$$

zwei aus nicht verwandten Vereinen abgeleitete Grössen. Wenn wir dann die Grössen b mit passenden Factoren multipliciren, so wird es möglich sein, den Verein dieser neuen Grössen dem ersten verwandt zu machen. Sei nun

$$c_r = x_r b_r.$$

Wenn dann

$$c_4 = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3$$

sein soll, so folgt:

$$b_4 = \frac{x_1}{x_4} \alpha_1 b_1 + \frac{x_2}{x_4} \alpha_2 b_2 + \frac{x_3}{x_4} \alpha_3 b_3;$$

folglich:

$$\beta_1 = \frac{x_1}{x_4} \alpha_1; \quad \beta_2 = \frac{x_2}{x_4} \alpha_2; \quad \beta_3 = \frac{x_3}{x_4} \alpha_3,$$

und:

$$x_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot x_4; \quad x_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \cdot x_4; \quad x_3 = \frac{\beta_3}{\alpha_3} \cdot x_4.$$

Die Grössen x sind also bis auf einen constanten Factor, dem man einen beliebigen Werth geben kann, bestimmt.

Man kann also in einer Ebene einen beliebigen Verein von vier Grössen b mit einem beliebigen Vereine a dadurch verwandt machen, dass man die Grössen b , wenn es Punkte sind, mit passenden Zahlcoefficienten versieht; wenn es aber Strecken sind, in angemessener Weise dreht oder verlängert. Diese Veränderungen hängen alle von einer beliebig zu wählenden Grösse x_4 ab, und es sind die bei verschiedener Wahl von x_4 entstandenen Vereine unter einander ebenfalls verwandt.

Da nun

$$x_4 b_4 = x_4 \beta_1 b_1 + x_4 \beta_2 b_2 + x_4 \beta_3 b_3$$

folgt, wenn man in dem Ausdruck für c_4 alle c durch x und b , und alle x durch x_4 ausdrückt, so sieht man, dass überhaupt die Multiplication mit einem Factor x_4 genügt, um den Verein der Grössen b mit demjenigen von a verwandt zu machen; und da man diesen Factor gleich 1 nehmen kann, so folgt, dass man überhaupt in der Ebene jeden Verein von vier unabhängigen Grössen einem anderen Vereine von vier unabhängigen Grössen verwandt setzen kann. Man hat also nur zu setzen:

$$c_4 = b_4; \quad \alpha_1 c_1 = \beta_1 b_1; \quad \alpha_2 c_2 = \beta_2 b_2; \quad \alpha_3 c_3 = \beta_3 b_3.$$

b) Besondere Beziehungen.

α) Directe Verwandtschaften.*)

Nehmen wir nun insbesondere an, x_4 sei so gewählt, dass 184.

$$e_1 = a_1; \quad c_2 = a_2; \quad c_3 = a_3; \quad c_4 = a_4$$

wird, und bezeichnen diesen Factor x_4 nun mit λ . Dann ist λ eine Grösse, welche einen Verein, dessen einzelne Grössen mit ihr multiplicirt werden, in einen verwandten Verein verwandelt.

Wenn also $(e_1 e_2 e_3)$ und $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$ zwei *Punktvereine* sind, und

$$r = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3;$$

$$\varrho = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3$$

ist, so kann man immer setzen:

$$r \lambda = \varrho; \quad e_1 \lambda = \varepsilon_1; \quad e_2 \lambda = \varepsilon_2; \quad e_3 \lambda = \varepsilon_3.$$

Die drei letzteren Gleichungen geben multiplicirt:

*) Vgl. G. A. II. 390. Anm. 2.

$$\lambda^3 (e_1 e_2 e_3) = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3),$$

oder:

$$\lambda^3 = \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)}{(e_1 e_2 e_3)}.$$

Bezeichnen wir mit q die Zahl, welche den *numerischen Werth* des Flächentheils $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$ darstellt, wenn $(e_1 e_2 e_3) = 1$ ist; dann ist

$$(\lambda^3) = q,$$

worin (λ^3) den numerischen Werth von λ^3 bedeutet.

Da

$$(r e_2 e_3) = \alpha_1 (e_1 e_2 e_3); \text{ und } (\varrho \varepsilon_2 \varepsilon_3) = \alpha_1 (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) = \alpha_1 q (e_1 e_2 e_3),$$

so ist:

$$(r e_2 e_3) = \frac{1}{q} (\varrho \varepsilon_2 \varepsilon_3); \text{ oder: } \lambda^3 (r e_2 e_3) = (\varrho \varepsilon_2 \varepsilon_3);$$

d. h.: die Verwandtschaft besteht auch zwischen den aus $(e_1 e_2 e_3)$ und $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$ durch gleiche Zahlen abgeleiteten Grössen.

Aus den verschiedenen Lösungen der Gleichung $(\lambda^3) = q$ ergeben sich nun verschiedene geometrische Verwandtschaften.

Seien *erstens die drei Wurzeln der Gleichung ungleich*, und mit $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ bezeichnet. Dann ist die Gleichung $(\lambda^3) = q$ erfüllt, wenn wir

$$e_1 \lambda_1 = \varepsilon_1; \quad e_2 \lambda_2 = \varepsilon_2; \quad e_3 \lambda_3 = \varepsilon_3$$

setzen. Die Verwandtschaft der beiden ursprünglichen Systeme heisst *Affinität*, diejenige der Geraden, welche durch die Linientheile $(e_1 e_2)$ $(e_2 e_3)$ $(e_3 e_1)$ bestimmt sind, *Collinearität*.

Ist speciell $q = 1$, so heisst die Verwandtschaft *Inhaltsgleichheit*. Es ist dann numerisch $\frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)}{(e_1 e_2 e_3)} = 1$.

Anm. Von den drei Wurzeln $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ ist die eine reell, die beiden anderen imaginär. Dies deutet darauf hin, dass räumlich die Punkte e_1 und ε_1 zusammenfallen. Dies thut jedoch der Allgemeinheit der durch unsre Bezeichnung dargestellten Verwandtschaft keinen Eintrag, da wir den Flächentheil $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$ in derselben Ebene durch Schiebung stets dahin bringen können, dass in seiner neuen Lage $(E_1 E_2 E_3)$ der Punkt E_1 mit e_1 zusammenfällt. Zwischen den Systemen $(E_1 E_2 E_3)$ und $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$ besteht dann eine Verwandtschaft, die wir in Nr. 52. Congruenz nannten, und weiter unten als einen speciellen Fall der Inhaltsgleichheit werden kennen lernen.

Seien *zweitens die drei Wurzeln der Gleichung gleich*, und mit (λ) bezeichnet. Dann ist die Gleichung $(\lambda^3) = q$ erfüllt, wenn wir

$$e_1 \lambda = \varepsilon_1; \quad e_2 \lambda = \varepsilon_2; \quad e_3 \lambda = \varepsilon_3$$

setzen. — Die Verwandtschaft der beiden ursprünglichen Systeme heisst nun *Aehnlichkeit*.

Da jetzt auch

$$(e_1 - e_2) (\lambda) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2);$$

$$(e_2 - e_3) (\lambda) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_3);$$

$$(e_3 - e_1) (\lambda) = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)$$

ist, so ist es ein charakteristisches Merkmal der Aehnlichkeit, dass das Verhältniss der numerischen Werthe zweier verwandten Strecken für jedes Streckenpaar dasselbe ist. Auch verhalten sich die Parallelogramme verwandter Streckenpaare numerisch, wie das Quadrat dieser Verhältnisszahl zu 1.

Ist q negativ, so wird die Aehnlichkeit *symmetrisch* genannt. Die Systeme liegen dann auf entgegengesetzten Seiten der Ebene.

Ist speciell $q = 1$, so heisst die Verwandtschaft *Congruenz*. Es ist dann numerisch:

$$\frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)}{(e_1 e_2 e_3)} = 1.$$

Wie nun die Aehnlichkeit als specieller Fall der Affinität (nämlich wenn die drei Wurzeln von q gleich sind) betrachtet werden kann, so auch die Congruenz als specieller Fall der Inhaltsgleichheit.

Das Verhältniss der vier Verwandtschaften lässt sich daher durch folgende Zusammenstellung veranschaulichen:

- | | |
|-----------------------|------------------|
| 1. Affinität. | 2. Aehnlichkeit. |
| 2. Inhaltsgleichheit. | 3. Congruenz. |

Hierin bezeichnet jede höhere Nummer einen speciellen Fall der nächst niederen.

Ist q negativ, so wird auch die Congruenz *symmetrisch* genannt.

Anm. Auch die *Projection* (s. S. 90) erscheint hiernach als eine specielle Art der Affinität.

β) Reciproke Verwandtschaften.

Sind (a, b, c) und (a_1, b_1, c_1) zwei *direct* verwandte 185. Vereine, so nennen wir die Vereine (a, b, c) und $(| a_1, | b_1, | c_1)$ *reciprok* verwandt. — Fallen insbesondere die beiden ersten Vereine zusammen (ein specieller Fall der Congruenz, welcher

Identität heisst), so sind auch die Vereine (a_1, b_1, c_1) und $(| a_1, | b_1, | c_1)$ reciprok verwandt.

Da aus

$$r = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

folgt:

$$| r = \alpha_1 | e_1 + \alpha_2 | e_2 + \alpha_3 | e_3,$$

so erhält man einen reciproken Verein, wenn man in einem gegebenen Vereine die ursprünglichen Einheiten (folglich auch alle Grössen des Vereins) durch ihre resp. Ergänzungen ersetzt.

Hiernach entspricht jeder Art von directer Verwandtschaft eine Art von reciproker. — Sind nun B und a zwei in irgend einer Weise *reciproke* Vereine, und ist A der aus den Ergänzungen von a gebildete Verein, so sind B und A in derselben Weise *direct* verwandt, und A und a stehen in demjenigen Reciprocitäts-Verhältniss, welches der Identität entspricht.

Auf diese letzte Art der Reciprocität, und auf eine *directe* Verwandtschaft lässt sich also jede Art der Reciprocität zurückführen.

186. Sind e_1, e_2, e_3 drei Punkte in der Ebene, so sind ihre Ergänzungen die von je zwei Punkten begrenzten Linientheile. Es ist also jeder Eckpunkt eines Dreiecks mit der gegenüberliegenden Seite reciprok verwandt, d. h. auch mit der durch diese Seite bestimmten Geraden. Es ist also auch jeder aus den Eckpunkten abgeleitete Punkt reciprok verwandt mit einer aus den Seiten abgeleiteten Geraden, z. B.:

Ein Punkt, der mit den drei Eckpunkten durch drei gerade Linien verbunden ist.

Eine Gerade, welche die drei Seiten in drei Punkten schneidet.

Drei durch die Eckpunkte gezogene Geraden, welche sich in einem Punkte schneiden.

Drei auf den Seiten angenommene Punkte, welche in einer Geraden liegen.

Wenn insbesondere die drei Geraden, welche das Dreieck bilden, durch denselben Punkt gehen, d. h. wenn jede Gerade mit dem reciproken Punkte zusammenfällt, so fällt auch jede abgeleitete Gerade mit dem reciproken Punkte zusammen.

Man kann also überhaupt drei Geraden, welche sich in

einem Punkte schneiden, reciprok setzen mit drei auf ihnen angenommenen Punkten, welche in einer Geraden liegen.

Sind nämlich A und (OA) , sowie B und (OB) als reciprok angenommen, und ist

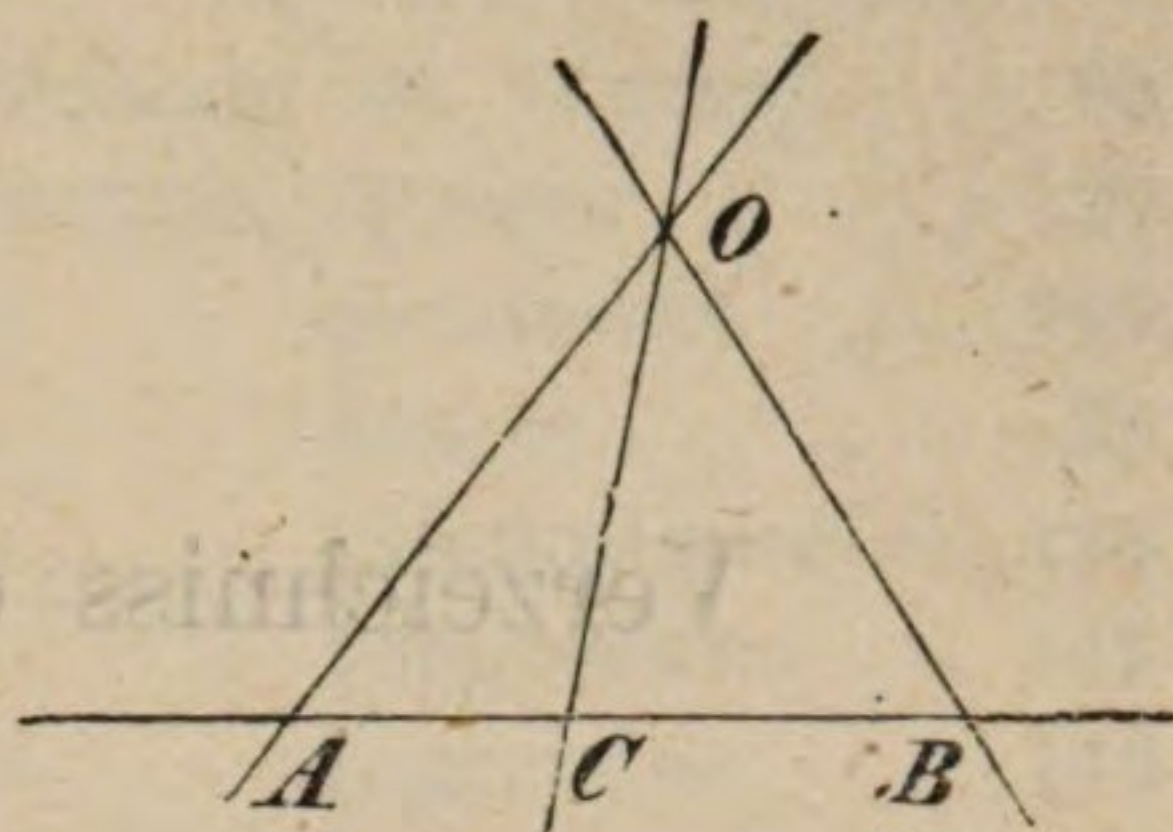
$$C = \alpha A + \beta B,$$

so folgt:

$$(OC) = \alpha(OA) + \beta(OB);$$

d. h.: auch C ist reciprok mit OC .

Hiermit sind nun auch die gegenseitigen Beziehungen zwischen Punktpaaren und Punktreihen einerseits, Linienpaaren und Strahlenbüscheln andererseits auf den allgemeinen Begriff der Reciprocität zurückgeführt.



Berichtigungen.

S. 48 soll in Nr. 87 und 88 die „beliebige feste Richtung“ nicht v , sondern r heissen.

S. 94 in der Figur ist die Strecke SA mit b_1 statt mit b zu bezeichnen

Verzeichniss der erklärten Ausdrücke.

	Nr.		Nr.
Ableitung	6	Dreieck gleichschenkliges . . .	91
— lineare	26	— rechtwinkliges	97
Aehnlichkeit	184	— umschriebenes	105
— symmetrische	184	Dreiecke, ähnliche	137
Aehnlichkeitspunkt	137	— congruente	107. 137
Aenderung, lineale	31	— ergänzende	112
— circuläre	153	— symmetr. ähnliche	99
Affinität	184	— symmetrische	92
Anharmonie	167	Dreiecksfläche	111
Ausdehnung	2	Durchmesser	91
		Durchschnittspunkt	64
Berührung	96		
Bewegung	1	Ebene	33
— doppelte	41	Ebenenstreifen	39
— einartige	41	Ebenenwinkel	64
— entgegengesetzte	3	Eckpunkt	45
		Einheit 1. Stufe	8
Centrale	172	— 2. Stufe	32
Centrum	89	— 3. Stufe	142
Collinearität	184	Ellipse	150
Congruenz	184	Entfernung, zwischen Punkten	11
Coordinaten-Axen	132	— zwischen Geraden	41
— -System	128. 132	— zwischen Punkt u.	
Cosinus	153	Gerade	41
Cotangens	153	Ergänzung	32. 142
Curve	146		
Curvenbüschel	178	Flächeneinheit	142
		Flächentheil	139
Diagonale	45	Funktion	164
Doppelabstand	163		
Drehung	34	Gebiet	4. 8
— entgegengesetzte	71	Gebilde	1
Drehungspunkt	34	— ähnliche	4
Dreieck	45	— congruente	4
— eingeschriebenes	95	— gleiche	3

	Nr.		Nr.
Geometrischer Ort	144	Mittelpunkt im Kreise	89
Gerade	9	— im Strahlenbüschel	175
Geraden, harmonische	119	— im Curvenbüschel	178
Gestalt	4	Mittelrichtung, im Winkel	83
Gleichung des Punktes	144	Multiplication, äussere	29
— der Geraden	144	— gemischte	145
Grenze	3	— innere	32
Grösse	3	— planimetrische	144
— einfache	32	— progressive	143
— zusammengesetzte	32	— regressive	143
Grundsystem	132	— rein progressive	145
		— rein regressive	145
Halbirungslinie des Parallelogr.	58	Normalsystem	152
— des Winkels	83	Numerischer Werth	32. 152
Halbirungspunkt	20	Parabel	150
Harmonie	168	Parallelität	39
Hauptgebiet	143	Parallelogramm	45
Höhe	94. 100	Perspectivität	176
Hyperbel	150	Pol	172
— gleichseitige	150	Polare	172
Identität	185	Projection	132. 184
Inhaltsgleichheit	184	— normale	152
Involution	171	— progressive	175
		— regressive	175
Kegelschnitt	147	Projectivität	176
Kreis	150	Proportion	137
— -ausschnitt	102	Proportionale, mittlere	99
— -bogen	89	Punkt	1
— -fläche	102	Punkte, harmonische	119
— -funktion	165	Punktepaare	167
— -linie	89	— anharmonische	167
		— harmonische	168
Längeneinheit	32	— involutorische	171
Lage	5	Punktgrösse	6
Leitsystem	132	Punktreihe	175
Linienpaare	167	Quadrat	45
— anharmonische	168	— inneres	32. 152
— harmonische	168	Radius	89
— involutorische	171	Raute	45
Linientheil	29	Rechteck	45
Mitte, harmonische	172	Reciprocität	185
Mittel, harmonisches	172	Richtung	4
Mittellinie, im Parallelogramm	58		
Mittelpunkt, zw. Punkten	20. 110		

Richtung, entgegengesetzte	Nr. 11	Winkel	Nr. 65
— senkrechte	69	— (nach Grösse), concaver	70
		— convexer	70
Schiebung	33	— geschlossener	67
Schneidung	64	— gestreckter	68
Secante	96	— rechter	69
Sehne	91	— spitzer	70
Seite	35	— stumpfer	70
Sinus	153	— (nach Lage), äusserer	75
Strahlenbüschel	175	— Centri-	89
Strecke	11	— innerer	75
System	3	— Peripherie-	93
		— (paarweise)anstossende	75
Tangens	153	— correspondirende	74
Tangente	96	— Gegen-	74
Transversale	115	— Neben-	73
		— Scheitel-	73
Umhüllung	103	— verschränkte	74
		— Wechsel-	74
Verwandtschaft	181		
Viereck, eingeschriebenes	93	Zeiger	132
Vieleck	45	Zweieck	26

Schlegel, Victor

System der Raumlehre Nach den Prinzipien der Grassmann'schen
Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe dargestellt von Victor
Schlegel
Bd.: 1.

Leipzig 1872

Math.p. 501 t-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11011206-6